

MATEMATIKOS MOKYKLA

A. FETISOVAS



APIE GEOMETRIJOS ĮRODYMUS



Leidykla „Mintis”
Vilnius — 1973

Kas yra įrodymas? Kam jo reikia? Kokiais principais grindžiami įrodymai? Atsakydamas į šiuos klausimus, autorius moko griežtai logiškai mąstyti, atskleidžia matematikos ir logikos ryšį, savotišką matematinio tikslumo meną.

Knygelė skiriama visiems besidomintiems *matematika*, ypač mokiniams ir matematikos mokytojams.

F 0222—110
M851(10)—73 109—72

© leidykla „Mintis“, 1973
vertimas į lietuvių kalbą.

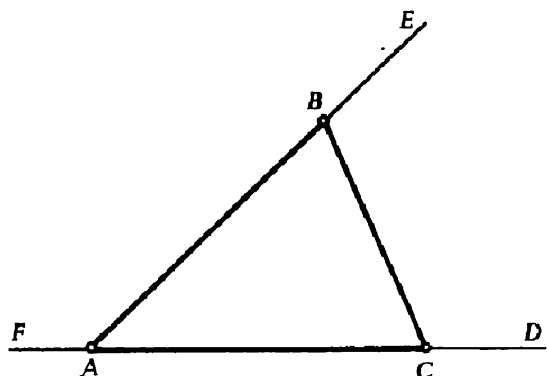
IVADAS

Kartą mokslo metų pradžioje nugirdau dviejų mergaičių pokalbį. Vyresnioji mokėsi šeštoje klasėje, o jaunesnioji — penktoje. Mergaitės dalijosi įspūdžiais apie pamokas, mokytojus, draugus, apie naujus dėstomus dalykus. Šeštoją labai nustebino geometrijos pamoka: „Tai keistenybės,— pasakojo ji,— atėjo mokytoja į klasę, nubraižė lentoje du lygius trikampius, o paskui visą pamoką įrodinėjo mums, kad jie lygūs. Negaliu suprasti: kam to reikia?“ — „O kaip tu pamoką atsakinėsi?“ — paklausė jaunesnioji mergaitė.—„Išmoksiu iš vadovėlio... tik labai sunku atsiminti, kur kokią raidę rašyti...“

Tą patį vakarą girdėjau, kaip toji mergaitė, sėdėdama prie lango, stropiai mokėsi geometriją: „Įrodymui uždėsime trikampį $A'B'C'$ ant trikampio ABC ... uždėsime trikampį $A'B'C'$ ant trikampio ABC ...“ — daug kartų kartojė ji. Gaila, man nepasisekė sužinoti, kaip sekėsi tai mergaitėi mokytis geometriją, bet manau, jog šis dalykas jai buvo gana sunkus.

Po kelių dienų pas mane užėjo kaimynas Tolia, taip pat šeštokas, su pretenzijomis geometrijai. Mokytojas paaiškino klasėje ir uždavė išmokti namuose teoremą apie tai, kad trikampio priekampis yra didesnis už kiekvieną jam negretutinį vidaus kampą. Tolia parodė vadovėlyje brėžinį (1 brėž.) ir paklausė: „Kam gi reikia ilgai ir painiai įrodinėti, kai iš šio brėžinio visiškai aišku, kad trikampio priekampis yra bukas, o jam negretutinis vidaus

kampas — smailus? Juk bukas kampas visuomet didesnis už smailųjį,— įtikinėjo mane Tolia,— tai aišku be jokio įrodymo“. Ir man teko išaiškinti Toliai, kad šis teiginys nėra savaime aiškus ir kad šią trikampio priekampio sąvokę reikia įrodyti.



1 brėž.

Pagaliau, visai neseniai vienas aštuntokas parodė savo kontrolinį darbą, už kurį, jo žodžiais tariant, mokytojas „neteisingai“ sumažino pažymį. Uždavinyje buvo duota lygiašonė trapecija, kurios pagrindai — 9 ir 25 cm ir šoninė kraštinė — 17 cm; reikėjo rasti trapecijos aukštinę. Kad būtų galima išspręsti šį uždavinį, į trapeciją buvo įbrėžtas apskritimas, be to, paaiškinta, kad, remiantis teorema apie apibrėžtinį keturkampį (apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių sumos yra lygios), į šią trapeciją galima įbrėžti apskritimą ($9 + 25 = 17 + 17$). Toliau aukštinė buvo randama kaip apskritimo, įbrėžto į lygiašonę trapeciją, skersmuo, kuris lygus trapecijos pagrindų viduriniam proporcingajam (tai buvo moksleiviams įrodyta anksčiau spręstame pavyzdyje).

Sprendimas atrodė labai paprastas ir įtikinantis, bet mokytojas pabrėžė, kad neteisingai remtasi teorema apie apibrėžtą keturkampį. Aštuntokas nesuprato. „Argi neteisinga, kad apibrėžto keturkampio priešingų kraštinių sumos yra lygios? O juk mūsų trapecijoje pagrindų suma yra lygi šoninių kraštinių sumai,— tai, vadinasi, ir į šią

trapeciją galima įbrėžti apskritimą. Kurgi klaida?“ — klausė jis.

Tokių faktų, apie kuriuos tik ką pasakojau, galima pateikti labai daug. Moksleiviai dažnai nesupranta, kam reikia įrodinėti tiesas, kurios ir be įrodymo pakankamai aiškos, įrodymai kartais atrodo bereikalingi ir griozdiški. Būna ir tokių atvejų, kai iš pirmo žvilgsnio visai aiškus ir įtikinantis įrodymas, smulkiau panagrinėjus, pasirodo neteisingas.

Ši maža knygutė parašyta, siekiant padėti moksleiviams išsiaiškinti šiuos klausimus:

1. Kas yra įrodymas?
2. Kam reikalingas įrodymas?
3. Koks turi būti įrodymas?
4. Ką galima geometrijoje priimti be įrodymo?

§ 1. KAS YRA ĮRODYMAS!

1. Taigi kas yra įrodymas? Įsivaizduokite, jog bandote įtikinti savo pašnekovą, kad Žemė yra rutulio formos. Jūs kalbate apie horizonto platėjimą, kylant stebėtojiui virš Žemės paviršiaus, apie keliones aplink Žemę, apie apskritą šešėlį, kurį Žemė meta ant Mėnulio, kai būna Mėnulio užtemimas, ir t. t.

Kiekvienas iš šių teiginių, kuriais norite įtikinti savo pašnekovą, vadinamas įrodymo *argumentu*, o argumentų visuma vadinama *argumentacija*. Kame slypi argumento svarumas, įtikinamumas? Išnagrinėsime, pavyzdžiui, pasukutinį iš pateiktųjų argumentų. Tvirtiname, kad Žemė turi būti apskrita, nes jos šešėlis apskritas. Šį tvirtinimą grindžiame tuo, kad žmonės iš patirties žino, jog visi kūnai, kurie yra rutulio formos, meta apskritą šešėlį, ir atvirkščiai, apskritus šešėlius, būdami bet kokioje padėtyje, meta tik rutulio formos kūnai. Taigi šiuo atveju pirmiausia remiamės f a k t a i s, tiesioginiu gyvenimo patyrimu, liudijan-

čiu apie mus supančio materialaus pasaulio kūnų savybes. Toliau darome išvadą, šiuo atveju šitaip.

„Visi kūnai, kurie, būdami įvairiose padėtyse, meta apskritą šešėlį, yra rutulio formos“. „Mėnulio užtemimų metu Žemė, būdama įvairiose padėtyse Mėnulio atžvilgiu, visada meta ant jo apskritą šešėlį“. Išvada: „Vadinasi, Žemė yra rutulio formos“.

Pateiksime pavyzdį iš fizikos. Praeito šimtmečio šešiasdešimtaisiais metais anglų fizikas Maksvelas nustatė, kad elektromagnetinės bangos sklinda erdvėje tokiu pat greičiu, koku sklinda šviesa. Ši aplinkybė vertė jį padaryti prielaidą (hipotezę), kad šviesa taip pat yra elektromagnetinės bangos. Norint įrodyti šios prielaidos teisingumą, reikėjo nustatyti, kad šviesos ir elektromagnetinių bangų panašumas neapsiriboja tik vienodu jų sklidimo greičiu, reikėjo pateikti pakankamai svarius argumentus, įrodančius vienodą abiejų reiškinių prigimtį. Tokie argumentai buvo bandymų rezultatai, neabejotinai įrodantys magnetinio ir elektrinio laukų įtaką įvairių šviesos šaltinių spinduliavimo pobūdžiui. Buvo aptikta ir daug kitų faktų, neabejotinai patvirtinančių, kad šviesa ir elektromagnetinės bangos yra tos pačios prigimtės.

Pateiksime dar aritmetinį pavyzdį. Imsime bet kuriuos nelyginius skaičius, kiekvieną iš jų pakelsime kvadratu ir kiekvieną iš gautų kvadratų sumažinsime vienetu. Pavyzdžiui:

$$7^2 - 1 = 48; 11^2 - 1 = 120; 5^2 - 1 = 24;$$

$$9^2 - 1 = 80; 15^2 - 1 = 224 \text{ ir t. t.}$$

Nagrinėdami gautus skaičius, pastebime vieną bendrą savybę: kiekvienas iš jų dalijasi be liekanos iš 8. Atlikę dar keletą bandymų su nelyginiais skaičiais ir gavę tuos pačius rezultatus, išsakome hipotezę: „Sumažinę vienetu bet kurio nelyginio skaičiaus kvadratą, gausime skaičių, dalų iš 8“.

Kadangi dabar kalbame apie bet kuriuos nelyginius skaičius, tai įrodymui reikia pateikti tokius argumentus, kurie tiktų visiems nelyginiams skaičiams. Prisiminsime, kad bet kurį nelyginį skaičių galima užrašyti $2n-1$ pavidalu; čia n — bet kuris natūrinis skaičius. Nelyginio skaičiaus kvadratą, sumažintą vienetu, galima užrašyti reiškiniu $(2n-1)^2-1$ pavidalu. Atskliaudę gauname: $(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1=4n^2-4n=4n(n-1)$.

Gautasis reiškinys dalosi iš 8, esant bet kuriam natūriniam n . Iš tikrųjų, skaičius $4n(n-1)$ turi daugiklį 4, todėl dalosi iš 4. Be to, $n-1$ ir n yra du gretimi natūriniai skaičiai, todėl vienas iš jų būtinai lyginis; vadinasi, šis reiškinys būtinai turi dar ir daugiklį 2.

Taigi skaičius $4n(n-1)$ visuomet dalus iš 8, o tai ir reikėjo įrodyti.

Iš šių pavyzdžių galime suprasti, kokiais pagrindiniais keliais mes pažįstame supantį pasaulį, jo daiktus, reiškinius ir dėsningumus. Pirmasis kelias — iš daugelio daiktų ar reiškinių stebėjimų ir bandymų nustatome bendrus jų dėsningumus. Iš pateiktų pavyzdžių galėjome pastebėti, kad, remdamiesi stebėjimais, žmonės nustatė priklausomybę tarp kūno formos ir jo šešėlio; gausiais stebėjimais ir bandymais patvirtino šviesos elektromagnetinę prigimtį; pagaliau, bandymai, kuriuos atlikome su nelyginių skaičių kvadratais, padėjo nustatyti tokių kvadratų, sumažintų vienetu, savybę. Šis kelias, kai daroma bendra išvada, išnagrinėjus daugelį atskirų atvejų, vadinamas *indukcija* (iš lotyniško žodžio *inductio* — „užvedimas“: nagrinėjant atskirus atvejus, kyla mintis, kad egzistuoja bendri dėsningumai).

Kitu keliu einame, kai, jau žinodami kuriuos nors bendrus dėsnius, pritaikome šias žinias atskiriems atvejams. Šis kelias vadinamas *dedukcija* (iš lotyniško žodžio *deduction* — „išvedimas“). Paskutiniame pavyzdyje panaudojome bendrus aritmetikos dėsnius atskiram atve-

jui, norėdami įrodyti vieną bet kurio nelyginio skaičiaus savybę.

Iš šio pavyzdžio matome, kad indukcijos ir dedukcijos negalima atskirti vieną nuo kitos. Indukcijos ir dedukcijos vieningumas — būdingas mokslinio mąstymo bruožas.

Lengva pastebėti, kad, bet ką įrodinėdami, mes einame šiais dviem keliais. Kai vieno ar kito teiginio įrodymui ieškome argumentų, naudojames bandymu, stebėjimu, faktų arba jau įrodytu, patikrintu teiginiu. Remdamiesi gautais duomenimis, darome išvadą, kad įrodomas teiginys teisingas arba klaidingas.

2. Tačiau grįžkime prie geometrijos. Geometrija nagrinėja materialaus pasaulio erdvines savybes. „Erdvinėmis“ vadinamos tokios savybės, kuriomis nusakoma forma, dydis ir daiktų tarpusavio padėtis. Aišku, kad žmonės susipažįsta su šiomis savybėmis praktinėje veikloje: jiems tenka matuoti ilgius, plotus ir tūrius, kad galėtų konstruoti mašinas, statyti pastatus, tiesti kelius, kanalus ir t.t. Natūralu, kad pirmosios geometrijos žinios buvo gautos indukcijos keliu iš daugybės stebėjimų ir bandymų. Tačiau, sukaupus daugiau geometrinių tiesų, paaiškėjo, kad kai kurias iš jų galima gauti iš kitų tiesų kaip išvadas, t.y. dedukcijos keliu, nedarant specialių bandymų.

Pavyzdžiui, iš daugkartinių stebėjimų ir bandymų įsitikiname, kad „per du taškus galima nubrėžti tiesę ir tiksliai vieną“. Remdamiesi šia tiesa, jau be jokių bandymų galime tvirtinti, kad „dvi skirtingos tiesės gali turėti ne daugiau kaip vieną bendrą tašką“. Ši nauja tiesa gaunama, visiškai paprastai samprotaujant. Iš tikrųjų, jeigu tarsime, kad dvi skirtingos tiesės gali turėti du bendrus taškus, tai iš čia turėsime daryti išvadą, kad per du taškus gali eiti dvi skirtingos tiesės, o tai prieštarauja anksčiau nustatytai tiesai.

Praktinė žmonių veikla padėjo atskleisti daug geometrijos tiesų, atspindinčių mūsų žinias apie materialaus pasaulio erdvines formas. Atidžiai išstudijavus šias tiesas,

paaishkėjo, kad vienas iš jų galima gauti loginio išvedimo keliu iš kitų. Todėl kilo mintis išskirti iš visų geometrinių tiesų dalį pačių paprasčiausių ir bendriausių, kurias galima priimti be įrodymo, o likusias geometrines tiesas ir priklausomybes išvesti dedukcijos keliu iš šių pagrindinių tiesų.

Tokia mintis kilo dar senosios Graikijos geometrams, kurie pradėjo sisteminti jiems žinomas geometrines tiesas, išveddami jas iš palyginti nedidelio skaičiaus pagrindinių teiginių. 300 m. pr. m. e. graikų geometras Euklidas Aleksandrietis pateikė pačią tobuliausią to laikotarpio geometrijos sistemą. Šioje sistemoje buvo išskirti teiginiai, priimami be įrodymo,—vadinamosios *aksiomos* (graikų žodis ἀξιοῦς reiškia „vertas pasitikėjimo“, patikimas). Likusieji teiginiai, kurių teisingumu įsitikinama įrodinėjant, buvo pavadinti *teoremomis* (graikų žodis θεωρεῖν — nagrinėti, svarstau).

Euklido geometrijos sistema gyvavo daug šimtmečių, ir netgi šiuo metu mokyklinės geometrijos skyriuose jaučiama Euklido įtaka. Tuo būdu, geometrijos sistemoje turime nedidelį skaičių pagrindinių tiesų — aksiomų, gautų indukcijos keliu ir priimtų be įrodymo, o likusios geometrijos tiesos išvedamos iš aksiomų, remiantis dedukciniais samprotavimais. Todėl geometrija iš esmės yra dedukcinis mokslas.

Šiuo metu pagrindinis geometrų uždavinys — išaiškinti visas aksiomas, reikalingas geometrijos sistemai sudaryti, ir kiek galint sumažinti jų skaičių. Šia linkme buvo pradėta dirbti dar praeitame šimtmetyje, ir, nors padaryta labai daug, vis dėlto negalima laikyti darbo užbaigtu ir šiuo metu.

Taigi, apibendrindami tai, kas išdėstyta šiame skyrelyje, galime atsakyti į klausimą: kas tai yra geometrijos įrodymas? Kaip matėme, įrodymas yra sistema išprotavimų, kuriais nagrinėjamo teiginio teisingumas išvedamas iš aksiomų ir anksčiau įrodytų tiesų.

Lieka atsakyti į dar vieną klausimą: kuo garantuojama, kad teiginiai, gauti dedukcinio išvedimo keliu, tikrai yra teisingi? Dedukcinės išvados teisingumą sąlygoja tai, kad bendrus dėsnius taikome atskiriems atvejams: juk visiškai aišku, kad visa tai, kas teisinga visur ir visada, teisinga ir kiekvienu atskiru atveju.

Jeigu, pavyzdžiui, sakome, kad bet kurio trikampio kampų suma lygi 180° ir kad figūra ABC — trikampis, tai negali būti jokių abejonių, kad $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Atidžiai mokantis geometriją, nesunku įsitikinti tuo, kad šitaip ir samprotaujame, darydami kiekvieną išvadą.

§ 2. KAM REIKALINGAS ĮRODYMAS!

1. Pasistengsime dabar atsakyti į antrą klausimą: „Kam reikalingas įrodymas?“

Tai, kad įrodymas būtinas, išplaukia iš vieno pagrindinių logikos dėsnių (logika — mokslas apie teisingo mąstymo dėsnius) — *pakankamo pagrindo dėsnio*. Pagal šį dėsni kiekvienas mūsų tvirtinimas turi būti pagrįstas, t. y. turėti pakankamai stiprius argumentus, patvirtinančius, kad jis teisingas, atitinka faktus, tikrovę. Tokiais argumentais gali būti — tiek nurodymas, kad teiginį galima patikrinti stebėjimais ir bandymais, tiek ir teisingas protavimo būdas, pagrįstas išvadų sistema.

Matematikoje susiduriame su antrojo tipo argumentacija.

Geometrinio teiginio įrodymo tikslas — nustatyti jo teisingumą, darant logines išvadas iš jau įrodytų arba žinomų tiesų.

Tačiau vis tik kyla klausimas: ar verta įrodinėti, jei įrodinėjamas teiginys ir taip pakankamai aiškus ir aki-vaizdus?

Panašios nuomonės viduramžiais buvo indų matematikai. Daugelio geometrijos teiginių jie neįrodinėjo, o

braižė pakankamai aiškius brėžinius ir virš jų rašė vieną žodį „žiūrėk!“. Pavyzdžiui, indų matematiko Bhaskaro Ačarjo knygoje „Lilavati“ Pitagoro teorema atrodo šitaip (2 brėž.). Šiuose dviejuose brėžiniuose skaitytojas turi „žiūrėti“, kad kvadratų, sudarytų iš stačiojo trikampio statinių, plotų suma lygi kvadrato, sudaryto iš įžambinių, plotui.

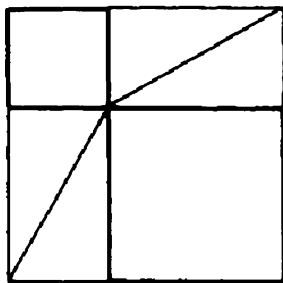
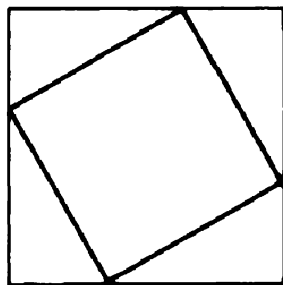
Ar galima pasakyti, kad šiuo atveju nėra įrodymo? Aišku, ne! Jeigu skaitytojas tik žiūrės į brėžinį neprotaudamas, tai vargu ar jis galės padaryti kokią nors išvadą. Autorius numato, kad skaitytojas ne tik žiūri,

bet ir mąsto. Skaitytojas turi suprasti, kad prieš jį nubrėžti lygūs kvadratai, kurių ir plotai lygūs. Pirmasis kvadratas, susideda iš keturių lygių stačiųjų trikampių ir kvadrato, kurio kraštinės yra įžambinės, o antrasis kvadratas susideda iš keturių tokių pat stačiųjų trikampių ir dviejų kvadratų, kurių kraštinės — statiniai. Be-

lieka tik suvokti, kad, iš lygių dydžių (dviejų didžiųjų kvadratų plotų) atėmus po lygiai (keturių stačiųjų trikampių plotus), liks taip pat lygūs plotai: iš pirmojo — kvadratas, kurio kraštinės yra įžambinės, o iš antrojo — du kvadratai, kurių kraštinės yra statiniai. Kaip matome, remtis vien akivaizdumu šiuo atveju nepakanka, reikia galvoti ir samprotauti.

Bet, gal būt, vis dėlto yra ir tokių geometrijos teoreimų, kurios iš tikrųjų tiek akivaizdžios, kad galima apsieiti be jokių samprotavimų?

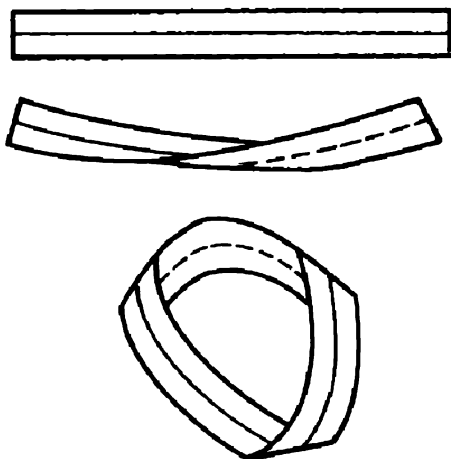
Pirmiausia reikia pažymėti, kad sistemingai remtis akivaizdumu tiksluose moksluose negalima, nes sąvoka „akivaizdu“ — labai miglota ir nepastovi: tai, kas vienam atrodo visiškai aišku, kitam atrodys abejotina. Pakanka



2 brėž.

prisiminti, kaip skirtingai liudininkai aprašo kokį nors įvykį ir kaip sunku būna nustatyti tiesą pagal vadina- muosius „mačiusiųjų parodymus“.

Galima pateikti įdomų geometrinių pavyzdį, kaip gali apgauti tariamas akivaizdumas. Štai toks pavyzdys: imu popieriaus lapą ir jame brėžiu nenutrūstą uždarą li- niją; po to imu žirkles ir kerpu šia linija. Klausimas: kas bus su popieriaus lapu, kai piūvio galai susijungs? Tik- riausiai dauguma, net nepagalvoję, atsakys: popieriaus lapas pasidalys į du atskirus gabalus. Tačiau šis atsaky- mas gali būti ir n e t e i s i n g a s. Padarykime šitokį ban- dymą: imkime popieriaus juostą ir iš jos suklijuokime žie- dą, pirma apsukę vieną juostos galą. Taip gausime vadi- namąjį „Mebiuso lapą“ (3. brėž.). (Mebiusas — vokiečių

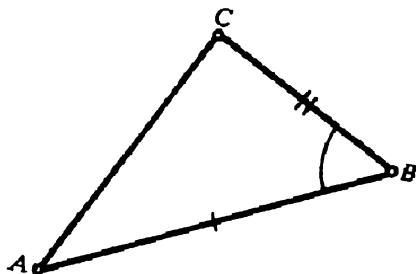


3 brėž.

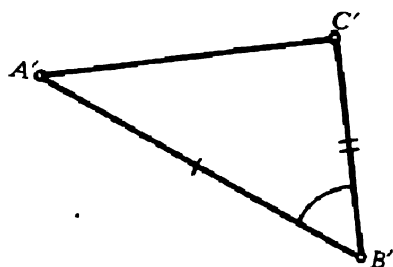
matematikas, nagrinėjęs tokio pavidalo paviršius.) Jeigu dabar šį lapą kirpsime uždara linija išilgai juostos, apy- tiksliai lygiu atstumu nuo kraštų, tai lapas n e p a s i d a- l y s į dvi atskiras dalis — mūsų rankose liks v i e n a s lapas. Panašūs faktai verčia susimąstyti apie tai, kiek ga- lima tikėti samprotavimais, pagrįstais „akivaizdumu“.

2. Panagrinėsime šį klausimą atidžiau. Kaip pirmą pavyzdį imsime anksčiau šeštokės papasakotą atvejį. Mer- gaitei pasirodė keista, kad mokytoja nubraižė du lygius

trikampus, o po to įrodinėjo lyg ir akivaizdų faktą, kad jie yra lygūs. O buvo kitaip: mokytoja nebraižė lygių trikampių, o nubraižiusi trikampį ABC (4 brėž.), pasakė, jog kitas trikampis $A'B'C'$ nubraižytas taip, kad $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ ir $\angle B = \angle B'$, ir kad nežinome, ar bus lygūs $\angle A'$ ir $\angle A$, $\angle C'$ ir $\angle C$, kraštinės $A'C'$ ir AC (juk kampas A' ir C' ji nebraižė lygius kampams A ir C , o kraštinę $A'C'$ lygią kraštinei AC).

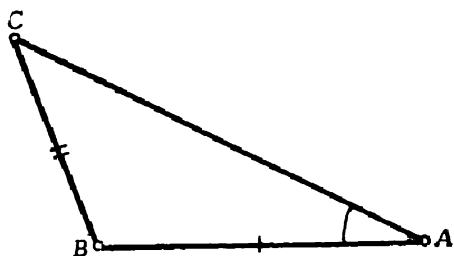


4 brėž.

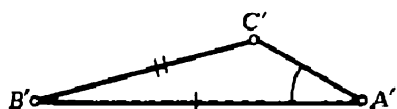


Tuo būdu, iš sąlygos $A'B' = AB$; $B'C' = BC$ ir $\angle B' = \angle B$ turime įrodyti trikampių lygybę, t. y. visų likusių jų elementų lygybę, o tam, aišku, būtini kai kurie samprotavimai. Taip pat lengva įsitikinti, kad trikampių lygybė, išplaukianti iš trijų porų atitinkamų elementų lygybės, visai ne tokia „akivaizdi“, kaip tai gali pasirodyti iš pirmo žvilgsnio. Truputį pakeiskime pirmosios teoremos apie trikampių lygybę sąlygą: tarkime, kad vieno trikampio dvi kraštinės yra lygios kito trikampio dviem atitinkamoms kraštinėms, be to, lygūs ir jų kampai, tik esantys ne tarp šių kraštinių, o prieš vieną iš lygių kraštinių, pavyzdžiui, BC ir $B'C'$. Užrašykime šią sąlygą trikampiams ABC ir

$A'B'C'$: $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ ir $\angle A' = \angle A$. Ką galime pasakyti apie šitokius trikampius? Analogiškai su pirmaisiais trikampių lygybės atvejais, galėtume spėti, kad ir šie du trikampiai bus lygūs. Tačiau 5 brėžinyje aiškiai parodyta, kad čia nubrėžti trikampiai ABC ir $A'B'C'$ anaiptol nėra lygūs, nors ir tenkina sąlygas $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ ir $\angle A' = \angle A$.



5 brėž.



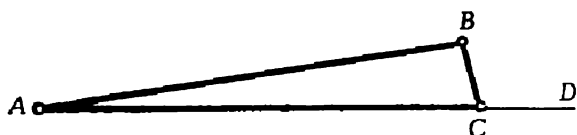
Panašūs pavyzdžiai verčia samprotauti labai atsargiai ir pakankamai įtikina, kad tik teisingas įrodymas gali garantuoti siūlomų teiginių teisingumą.

3. Dabar išnagrinėsime antrąją teoremą — apie trikampio priekampį, kuri suglumino mano kaimyną Tolią. Iš tikrųjų, tame brėžinyje, kuris atspausdintas vadovėlyje, priekampis bukas, o jam negretutiniai vidaus kampai smailūs — tai lengva nustatyti be jokio matavimo, iš akies. Bet ar iš to išplaukia, kad teoremos nereikia įrodyti? Aišku, ne. Juk teoremoje kalbama ne tik apie tą trikampį, kuris nubraižytas knygoje arba popieriuje, arba lentoje, o apie bet kurį trikampį, kuris gali būti visai nepanašus į trikampį vadovėlyje.

Pavyzdžiui, tarkime, kad taškas A tolsta tiese nuo taško C . Tuomet gausime tokį trikampį ABC (6 brėž.), kurio kampas prie taško B bus taip pat bukas. Jeigu taškas

A nutols nuo taško C apie 10 metrų, tai tokiam ilgame trikampyje savo mokykliniu matlankiu negalėsime rasti skirtumo tarp priekampio B ir vidaus kampo. O jeigu taškas A nutols nuo taško C atstumu, lygiu nuo Žemės iki

6 brėž.



Saulės, tai netgi tiksliausiais šiuolaikiniais kampų matavimo prietaisais nerasime skirtumo tarp šių kampų. Iš čia aišku, kad negalime kalbėti ir apie šios teoremos „akivaizdumą“. Tuo tarpu tikslus šios teoremos įrodymas nepriklauso nuo atsitiktinės nubrėžto trikampio formos, ir juo patvirtinama, kad teorema apie vidaus kampą teisinga bet kuriems trikampiams nepriklausomai nuo jų kraštinių ilgio.

Todėl netgi tais atvejais, kai skirtumas tarp vidaus kampo ir priekampio toks mažas, kad jo neparodo matavimo prietaisai, vis dėlto tikime, kad šis skirtumas yra. Juk įrodėme, kad visuomet, visais atvejais, trikampio priekampis didesnis už jam negretutinį vidaus kampą.

Kartu reikia atkreipti dėmesį į tai, koks vaidmuo, įrodinėjant geometrijos teoremą, tenka brėžiniui. Reikia gerai atsiminti, kad brėžinys yra tik pagalbinė priemonė, kad jis yra tik pavyzdys, tik visos geometrinų figūrų klasės, kurios atžvilgiu įrodoma teorema, atskiras atvejis. Todėl labai svarbu mokėti atskirti brėžinyje bendras ir pastovias figūros savybes nuo atsitiktinių. Pavyzdžiui, brėžinyje, kuriuo iliustruojama vadovėlyje trikampio priekampio teorema, atsitiktinis faktas yra tas, kad priekampis bukas, o vidaus kampai — smailūs. Aišku, kad remtis tokiais atsitiktiniais faktais, įrodinėjant savybę, bendrą visiems trikampiams, negalima.

Geometrinio įrodymo esminė savybė yra ta, kad su jo pagalba nustatomos bendros erdvės figūrų savy-

bės,— štai todėl įrodymas ir būtinas. Jeigu įrodinėjama teisingai ir remiamasi teisingais pradiniais teiginiais, tai neabejojame, kad įrodytasis teiginys yra teisingas. Todėl esame įsitikinę, kad bet kuri geometrinė teorema, pavyzdžiui, Pitagoro teorema, teisinga, bet kokių matmenų trikampiams — su kelių milimetrų ar milijonų kilometrų kraštinėmis.

4. Pagaliau įrodymas būtinas dėl dar vienos nepaprastai svarbios priežasties. Geometrija yra ne atsitiktinių tiesų apie erdvių kūnų savybes, rinkinys, o mokslinė sistema, sukurta pagal griežtus dėsnius. Šioje sistemoje kiekviena teorema organiškai susijusi su anksčiau nustatytų teiginių visuma, ir šis ryšys atsiskleidžia įrodymo keliu. Pavyzdžiui, žinoma teorema, kad trikampio vidaus kampų suma yra lygi 180° , įrodinėjama, remiantis lygiagrečių tiesių savybėmis, o tai rodo esant tiesioginį ryšį tarp lygiagrečių tiesių teorijos ir daugiakampių vidaus kampų sumos savybių. Lygiai taip pat lygiagrečių tiesių savybėmis pagrįsta visa panašių figūrų teorija.

Tuo būdu, kiekviena geometrijos teorema yra susijusi ištisa išvedimų sistema, su anksčiau įrodytomis teoremomis, o šios anksčiau įrodytos — su dar anksčiau įrodytomis teoremomis ir t. t., ir šių išvedimų grandinė tęsiasi tol, kol pasiekia pagrindinius apibrėžimus ir aksiomas, sudarančius visos geometrijos pagrindą. Šią ryšių sistemą lengva pasekti, paėmus bet kurią geometrijos teoremą ir išnagrinėjus visus tuos teiginius, kuriais ji remiasi.

Taigi, darydami išvadas apie įrodymo būtinumą, galime štai ką pasakyti:

1. Tik nedaugelis pagrindinių geometrijos tiesų — aksiomų — priimama be įrodymo. Likusios tiesos — teoremos — įrodomos, darant eilę išvadų iš šių aksiomų. Pačių aksiomų teisingumas garantuojamas tuo, kad ir jos pačios, ir jomis remiantis įrodinėjamos teoremos patikrintos daugelio stebėjimų ir ilgų bandymų.

2. Įrodoma, remiantis vienu iš pagrindinių mūsų mąstymo dėsnių,— pakankamo pagrindo dėsniu, kuris nurodo, kad mūsų tvirtinimų teisingumą reikia griežtai pagrįsti.

3. Teisingas įrodymas bus toks, kuriame remiamasi tik anksčiau įrodytais teiginiais ir niekur nepasikliaujama akivaizdumu*.

4. Įrodymas taip pat būtinas, norint pagrįsti, kad įrodomas teiginys yra bendras, t. y. jis pritaikomas visais konkrečiais atvejais.

5. Pagaliau, remiantis įrodymu, geometrinės tiesos suderinamos į darnią mokslo žinių sistemą, kurioje atsiskleidžia visi erdvės figūrų įvairių savybių tarpusavio ryšiai.

§ 3. KOKS TURI BŪTI ĮRODYMASI

1. Dabar pereisime prie sekančio klausimo: kokias sąlygas turi tenkinti įrodymas, kad galėtume jį vadinti *teisingu*, t. y. iš teisingų prielaidų garantuotai gautume teisingas išvadas? Pradžioje atkreipsime dėmesį į tai, kad kiekvienas įrodymas susideda iš daugelio išprotavimų, todėl teisingas ar neteisingas įrodymas priklauso nuo to, teisingai ar neteisingai buvo protaujama.

Kaip jau anksčiau matėme, dedukcinė išvada yra tam tikro bendro dėsnio pritaikymas atskiram atvejui. Kad nepadarius išprotavimuose klaidų, būtina žinoti schemas, kuriomis atvaizduojamas ryšys tarp visokių, tame tarpe ir tarp geometrinių, sąvokų. Tai paaiškinsime pavyzdžiu. Tarkime, kad padarėme šitokią išvadą: 1) kiekvieno stačiakampio įstrižinės tarpusavyje lygios, 2) visi kvadra-

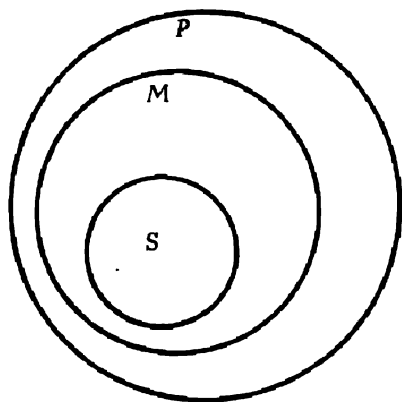
* Daugelis mokslo teiginių, kurie dėl akivaizdumo buvo laikomi nesugriaunamais, su laiku pasirodė besą neteisingi. Kiekvieno mokslo kiekvienas teiginys turi būti tiksliai įrodytas.

tai — stačiakampiai, 3) išvada: kiekvieno kvadrato įstrižainės tarpusavyje lygios.

Pirmuoju teiginiu pasakomas tam tikras bendras dės-
nis: tvirtinama, kad kiekvienas stačiakampis, t. y. visa
klasė geometrinių figūrų, vadinamų stačiakampiais,
priklauso keturkampių su lygiomis įstrižainėmis klasei.
Antruoju teiginiu tvirtinama, kad visa kvadratų klasė yra
stačiakampių klasės dalis. Iš čia galima daryti išvadą,
kad ir visa kvadratų klasė yra keturkampių su lygiomis
įstrižainėmis klasės dalis. Išreiškiame šį samprotavimą
bendra forma. Didžiausią klasę (keturkampiai, turintys
lygias įstrižaines) pažymėsime raide P , vidurinę klasę
(stačiakampiai) — raide M , mažiausią klasę (kvadra-
tai) — raide S . Tuomet mūsų samprotavimų schema atro-
dys šitaip:

1. Visi M yra P .
2. Visi S yra M .
3. Išvada: visi S yra P .

Šį santykį labai lengva atvaizduoti grafiškai. Di-
džiausią klasę P pažymėsime dideliu skrituliu (7 brėž.).



7 brėž.

Klasę M pažymėsime mažesniu skrituliu, nubrėžtu pirma-
me skritulyje. Pagaliau klasę S pažymėsime dar mažesniu
skrituliu, nubrėžtu antrame skritulyje. Be abejo, esant to-
kiai skritulių padėčiai, visas skritulys S yra skritulio P
viduje.

Pastebėsime, kad taip vaizduoti sąvokų santykį pasiūlė didysis matematikas Leonardas Oileris — Peterburgo Mokslų akademijos narys (1707—1783).

Panašia schema galima atvaizduoti ir kitus išprotavimus. Fanagrinėsime, kaip protaujant prieinamos neigiamos išvados:

1. Keturkampio, kurio priešingų kampų suma nėra lygi 180° , negalima įbrėžti į apskritimą.

2. Lygiagretainio priešingų kampų suma nėra lygi 180° .

3. Išvada: lygiagretainio negalima įbrėžti į apskritimą.

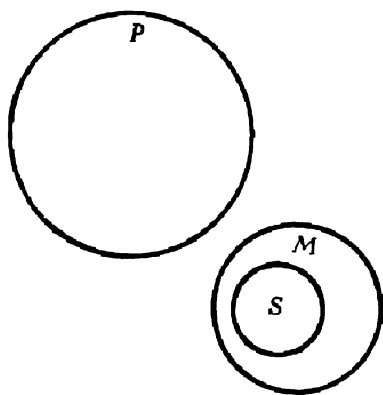
Keturkampių, kurių negalima įbrėžti į apskritimą, klasę pažymėsime raide P , keturkampių, kurių priešingų kampų suma nėra lygi 180° , klasę pažymėsime raide M , o lygiagretainių klasę pažymėsime raide S . Tuomet įsitikinsime, kad mūsų samprotavimai atitinka šitokią schemą:

1. Nė vienas M nėra P .

2. Visi S yra M .

3. Išvada: nė vienas S nėra P .

8 brėž



Šis santykis vaizdžiai parodomas Oilerio skrituliais (8 brėž.).

Dauguma dedukcinių geometrijos išprotavimų konstruojami arba pagal pirmą, arba pagal antrą schemą.

2. Panašiai vaizduojant įvairius geometrinių sąvokų santykius, galima gerai pažinti kiekvieno išprotavimo struktūrą ir surasti neteisingų išprotavimų klaidą.

Kaip pavyzdį išnagrinėsime anksčiau aprašytą aštuntoko samprotavimą, kurį mokytojas pripažino neteisingu. Aštuntokas samprotavo šitaip:

1. Visų apibrėžtų keturkampių priešingų kraštinių sumos yra lygios.

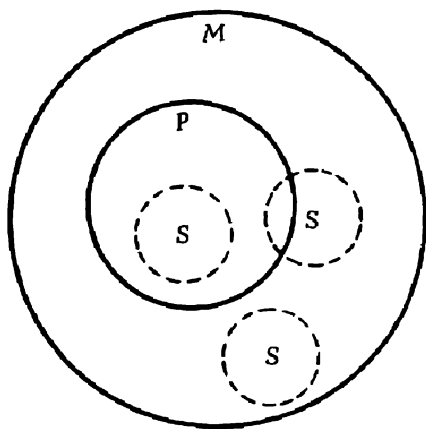
2. Duotosios trapecijos priešingų kraštinių sumos yra lygios.

3. Išvada: duotoji trapecija gali būti apibrėžta apie apskritimą.

Apibrėžtų keturkampių klasę pažymėję raide P , keturkampių, kurių priešingų kraštinių sumos lygios, klasę — raide M ir trapecijų, kurių pagrindų suma lygi šoninių kraštinių sumai, klasę — raide S , gausime šitokią schemą:

1. Visi P yra M .

2. Visi S yra M .



9 brėž.

3. Išvada: visi S yra P — neteisinga, nes, vaizduodami santykį tarp klasių Oilerio skrituliais (9 brėž.), pamatysime, kad P ir S yra viduje M , bet negalima padaryti jokios išvados apie S ir P tarpusavio priklausomybę. Kad aiškiau matytume, jog ši išvada neteisinga, imsime kaip pavyzdį analogišką išprotavimą:

1. Visų gretutinių kampų suma lygi 180° .
2. Du duotieji kampai sudaro 180° .
3. Išvada: vadinasi, duotieji kampai gretutiniai.

Išvada, aišku, neteisinga, nes kampai, kurių suma lygi 180° , gali ir nebūti gretutiniai (pavyzdžiui, įbrėžto keturkampio priešiniai kampai). Kodėl daromos panašios klaidos? Taip atsitinka dėl to, kad protaujant remiamasi pagrindine teorema, o reikia remtis — atvirkštine. Pavyzdyje su apibrėžtu keturkampiu pagrindinė yra teorema, kad apibrėžto keturkampio priešingų kraštinių sumos tarpusavyje lygios. Atvirkštinė teorema — į bet kurį keturkampį, kurio priešingų kraštinių sumos yra lygios, galima įbrėžti apskritimą — vadovėlyje neįrodyta, nors ją įrodyti galima ir toliau įrodysime.

Jeigu pastaroji teorema būtų įrodyta, tai būtų teisinga šitaip protauti:

1. Į bet kurį keturkampį, kurio priešingų kraštinių sumos lygios, galima įbrėžti apskritimą.

2. Duotosios trapecijos pagrindų suma yra lygi šoninių kraštinių sumai.

3. Išvada: vadinasi, į duotąją trapeciją galima įbrėžti apskritimą.

Išvada, aišku, visiškai teisinga, nes sudaryta pagal schemą, kuri atvaizduota 6 brėžinyje:

1. Visi M yra P .

2. Visi S yra M .

3. Išvada: visi S yra P .

Taigi aštuntoko klaida ta, kad įrodydamas jis rėmėsi tiesiogine teorema, o reikėjo remtis atvirkštine.

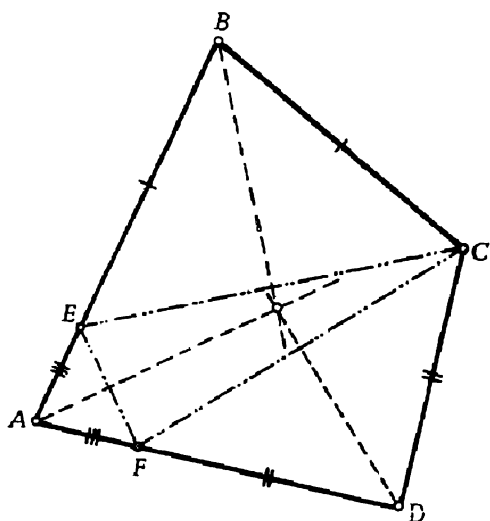
3. Įrodysime šią svarbią atvirkštinę teoremą.

Teorema. Į kiekvieną keturkampį, kurio priešingų kraštinių sumos yra lygios, galima įbrėžti apskritimą.

Pirmiausia pastebėsime, kad, jeigu į keturkampį galima įbrėžti apskritimą, tai jo centras yra vienodai nutolęs nuo visų keturkampio kraštinių. Kadangi kampo pusiaukampinė yra geometrinė vieta taškų, vienodai nutolu-

sių nuo jo kraštinių, tai įbrėžto apskritimo centras yra kiekvieno vidaus kampo pusiaukampinėse. Taigi, įbrėžto apskritimo centras yra keturių keturkampio vidaus kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas.

Tačiau, jeigu bent trys keturkampio pusiaukampinės susikerta viename taške, tai per šį tašką praeis ir ketvirtoji pusiaukampinė, ir šis taškas bus vienodai nutolęs nuo visų keturių kraštinių — jis bus įbrėžto apskritimo centras. Tai galima įrodyti, samprotaujant taip pat, kaip ir įrodinėjant teoremą apie apskritimo, įbrėžto į trikampį, egzistavimą, todėl paliekame tai padaryti patiems skaitytojams savarankiškai.



10 brėž.

Pereisime prie pagrindinės įrodymo dalies. Tarkime, kad turime keturkampį $ABCD$ (10 brėž.), kuris tenkina tapatybę

$$AB + CD = BC + AD. \quad (1)$$

Pirmiausia atmetame atvejį, kai duotas keturkampis yra rombas, nes rombo įstrižainės yra vidaus kampų pusiaukampinės ir todėl jų susikirtimo taškas yra įbrėžto apskritimo centras, t. y. į rombą visuomet galima įbrėžti apskritimą. Todėl tarsime, kad mūsų keturkampis turi dvi nelygias gretimas kraštines, pavyzdžiui, $AB > BC$. Tuomet,

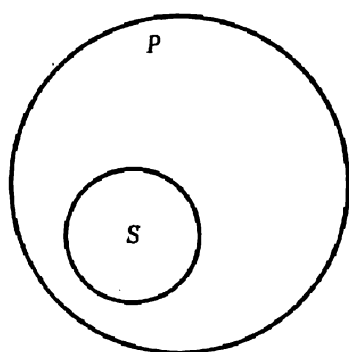
remiantis (1) lygybe, gauname, kad $CD < AD$. Ant AB atidedame atkarpą $BE = BC$ ir gauname lygiašonį trikampį BCE . Ant AD atidedame atkarpą $DF = CD$ ir gauname lygiašonį trikampį SDF . Įrodysime, kad trikampis AEF taip pat lygiašonis. Iš tikrųjų, (1) lygybėje BC perkėlę į kairę pusę, o CD — į dešinę, gauname: $AB - BC = AD - CD$, bet $AB - BC = AE$, $AD - CD = AF$. Taigi $AE = AF$, ir $\triangle AEF$ yra lygiašonis. Trijuose gautuose lygiašoniuose trikampiuose iš viršūnių kampų išvesime pusiaukampines, t. y. $\angle B$, $\angle D$ ir $\angle A$ pusiaukampines. Šios trys pusiaukampinės statmenos pagrindams CE , CF ir EF ir dalija juos pusiau. Vadinasi, jos yra statmenys, išvesti per trikampio CEF kraštinių vidurius, ir todėl turi susikirsti viename taške. Taigi mūsų keturkampio trys pusiaukampinės susikerta viename taške, kuris, kaip buvo anksčiau parodyta, yra įbrėžto apskritimo centras.

4. Labai dažnai įrodymuose pasitaiko šitokia klaida: remiamasi tiesiogine teorema, kai reikia remtis atvirkštine. Reikia būti labai atidiems, norint nepadaryti šios klaidos. Pavyzdžiui, jeigu moksleivių klausama, kokios rūšies yra trikampis, kurio kraštinės lygios 3, 4 ir 5 ilgio vienetams, tai paprastai tenka išgirsti, kad šis trikampis status, nes dviejų kraštinių kvadratų suma, $3^2 + 4^2$, yra lygi trečios kraštinės kvadrato 5^2 , ir remiamasi Pitagoro teorema, nors reikia remtis jai atvirkštine. Atvirkštinė teorema tvirtina: jeigu trikampio dviejų kraštinių kvadratų suma lygi trečios kraštinės kvadrato, tai toks trikampis yra statusis. Nors ši teorema mokykliniame vadovėlyje įrodoma, bet dažnai jai skiriama per mažai dėmesio, ir dėl to daroma aukščiau nurodyta klaida.

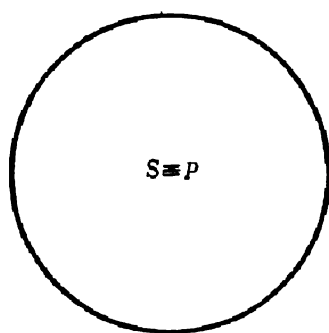
Kaip matome, pravartu nustatyti sąlygas, kurioms esant kartu yra teisingos tiesioginė ir atvirkštinė teoremos. Jau žinome pavyzdžių, kai tiesioginė ir atvirkštinė teoremos tuo pačiu metu teisingos, bet galima pateikti nemažiau ir tokių pavyzdžių, kai tiesioginė teorema teisinga, o atvirkštinė — ne. Pavyzdžiui, tiesioginė teorema

teisingai tvirtina, kad kampai tarpusavyje statmenomis kraštinėmis yra lygūs; atvirkštinė teorema turėtų tvirtinti, kad visi vienas kitam lygūs kampai yra kampai, tarpusavyje statmenomis kraštinėmis, o tai, aišku, neteisinga.

Kad vaizdžiau išsiaiškintume santykį tarp tiesioginės ir atvirkštinės teoremos, vėl grįšime prie scheminio vaizdavimo. Jeigu tiesioginė teorema teigia: „Visi S yra P “ („Visos kampų su tarpusavyje statmenomis kraštinėmis poros yra lygių kampų poros“), tai atvirkštinė teorema turėtų teigti: „Visi P yra S “ („Dviejų lygių kampų kraštinės visada tarpusavyje statmenos“). Atvaizdavę tiesioginės teoremos sąvokų tarpusavio santykį Oilerio skrituliais (11 brėž.), įsitikinsime, jog iš to, kad klasė S yra klasės P dalis, galime padaryti išvadą tikrai kad „kai kurie P yra S “ („Kai kurių lygių kampų kraštinės yra tarpusavyje statmenos“).



11 brėž.



12 brėž.

Kokiomis sąlygomis bus tuo pačiu metu teisingi tvirtinimai: „Visi S yra P “ ir „Visi P yra S “? Visiškai aišku, kad šitaip gali būti tada ir tik tada, kai klasės S ir P tapatinamos ($S = P$). Tokiu atveju skritulys, vaizduojantis S , sutampa su skrituliu, vaizduojančiu P (12 brėž.). Pavyzdžiui, teoremai „Visų lygiašonių trikampių kampai yra lygūs“ atvirkščias tvirtinimas: „Visi trikampiai, kurių kampai prie pagrindo lygūs, yra lygiašoniai“ taip pat teisingas. Teiginį galima paaiškinti tuo, kad lygiašonių tri-

kampių klasė ir klasė trikampių, kurių kampai prie pagrindo lygūs — viena ir ta pati. Lygiai taip pat sutampa stačiųjų trikampių klasė ir klasė trikampių, kurių vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai. Mano pažįstamam aštuntokui „pavyko“, jis vis dėlto išsprendė uždavinį, nors rėmėsi tiesiogine teorema vietoj atvirkštinės.

Bet taip atsitiko tiktai todėl, kad keturkampių, į kuriuos galima įbrėžti apskritimą, klasė sutampa su klase keturkampių, kurių priešingų kraštinių sumos yra lygios. (Duotuoju atveju paaiškėjo, kad teisinga ir „Visi P yra M “, ir „Visi M yra P “, — žr. išprotavimų schemą 20 psl.)

Iš šio tyrimo taip pat matome, kad atvirkštinė teorema, jeigu ji teisinga, anaip tol nėra akivaizdi tiesioginės teoremos išvada, — ją *visuomet reikia įrodyti*.

5. Kartais gali atrodyti, kad tiesioginė ir atvirkštinė teoremos neatitinka schemas „Visi S yra P “ ir „Visi P yra S “. Taip būna tais atvejais, kai teoremos išreiškiamos vadinamąja „sąlyginio sprendimo“ forma, kuri schemiškai užrašoma šitaip: „Jeigu A yra B , tai C yra O “. Pavyzdžiui: „Jeigu keturkampis apibrėžtas apie apskritimą, tai jo priešingų kraštinių sumos yra tarpusavyje lygios“. Pirmoji teiginio dalis — „Jeigu A yra B “ — vadinama teoremos *sąlyga*, antroji dalis — „tai C yra D “ — vadinama *išvada*. Atvirkštinė teorema gaunama iš tiesioginės, padarius išvadą sąlyga, o sąlygą — išvada. Daugeliu atvejų sąlyginio sprendimo forma yra labiau įprasta, negu forma „Visi S yra P “, kuri vadinama „kategoriškąja“. Tačiau lengva įsitikinti, kad šis skirtumas neesminis ir kiekvieną sąlyginį sprendimą lengva paversti kategoriškuoju, o kategoriškąjį — sąlyginiu. Pavyzdžiui, teoremą, išreikštą sąlygine forma: „Jeigu dvi lygiagrečios tiesės perkirsime trečiąja, tai vidaus priešiniai kampai bus lygūs tarpusavyje“, kategoriška forma galima šitaip išreikšti: „Lygiagrečios tiesės, perkirtus jas trečiąja, sudaro lygius vidaus priešinius kampus“. Tuo būdu, mūsų samprotavimai tin-

ka ir teoremais, išreikštomis sąlygine forma. Ir čia tiesioginės ir atvirkštinės teoremos yra teisingos tuo pačiu metu, jeigu sutampa atitinkamų sąvokų klasės. Štai ką tik išnagrinėtame pavyzdyje drauge teisingos ir tiesioginė, ir atvirkštinė teoremos, nes „lygiagrečių tiesių“ klasė tolygi „tiesių, kurias perkirtus trečiajame tiese, susidaro lygūs vidaus priešiniai kampai“ klasei.

6. Dabar nagrinėsime kitas įrodymų klaidas. Labai dažnai įrodymas būna klaidingas todėl, kad įrodinėjant remiamasi atskirais atvejais, ir nepastebima kitų duotos figūros savybių. Tokia buvo mano kaimyno Tolios klaida; jis norėjo įrodyti bendrą teoremą apie bet kurio trikampio priekampį, nagrinėdamas tik smailųjį trikampį, kurio visi vidaus kampai iš tikrųjų smailūs, o visi priekampiai — buki.

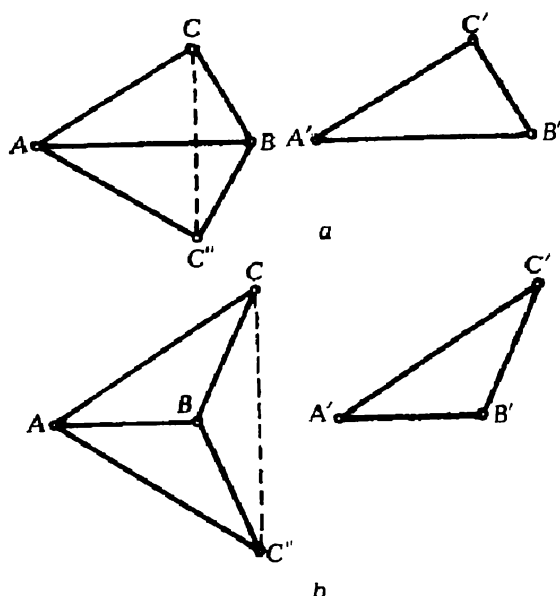
Pateiksime dar vieną panašios įrodymo klaidos pavyzdį, kuriame klaida mažiau pastebima. Aukščiau pateikėme pavyzdį apie du nelygius trikampius (žr. 4 brėž.), kurių dvi kraštinės ir kampas, esantis prieš vieną iš jų, atitinkamai lygūs. Duosime dabar pavyzdį „įrodymo“, kuris, priešingai nustatytam faktui, tvirtina, kad trikampiai, tenkinantys aukščiau nurodytas sąlygas, būtinai bus lygūs. Šis įrodymas įdomus dar tuo, kad jis labai panašus į trikampių lygybės trečiojo požymio įrodymą mokykliniame vadovėlyje.

Taigi tarkime, kad duoti trikampiai ABC ir $A'B'C'$ (13 brėž.), kurių $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ir $\angle C = \angle C'$. Įrodymui $\triangle A'B'C'$ uždėsime ant $\triangle ABC$ taip, kad kraštinė $A'B'$ sutaptų su kraštine AB ir taškas C' užimtų padėtį C'' . Sujungsime taškus C ir C'' ir tarsime, kad atkarpa CC'' perkirs kraštinę AB tarp taškų A ir B (13 brėž., a). Pagal sąlygą $\triangle ACC''$ lygiašonis ($AC = AC''$), vadinasi, $\triangle ACC'' = \triangle AC''C$. Kadangi $\angle C = \angle C''$, tai, atėmę iš lygių kampų lygius, gausime taip pat lygius kampus: $\angle BCC'' = \angle BC''C$, taigi $\triangle BCC''$ — taip pat lygiašonis. Todėl $BC =$

$=BC''$ ir $\triangle ABC = \triangle ABC''$, nes atitinkamai lygios visos trys kraštinės. Taigi $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Jeigu atkarpa CC'' kirs tiesę AB ne tarp taškų A ir B , tai teorema taip pat bus teisinga (13 brėž., *b*). Iš tikrųjų.

13 brėž.

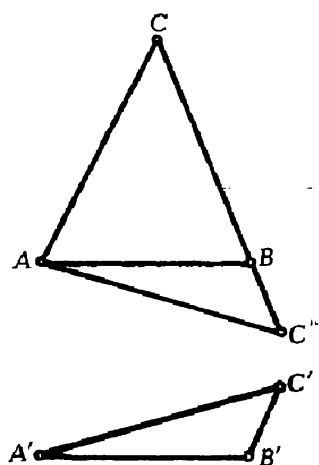


$\triangle ACC''$ ir šiuo atveju lygiašonis ir $\angle ACC'' = \angle AC''C$. Kadangi $\angle C = \angle C''$, tai, atėmę šią lygybę iš ankstesnės lygybės, vėl gausime, kad $\angle BCC'' = \angle BC''C$ ir $\triangle BCC''$ lygiašonis; vadinasi, $BC = BC''$, ir vėl grįžome prie trikampių lygybės trečiojo požymio, t. y. vėl $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Atrodo, pateikėme pakankamai išsamų įrodymą ir išsėmėme visus galimus atvejus. O vis dėlto dar vieną atvejį praleidome: būtent, kai atkarpa CC'' eina per atkarpos AB galą. 14 brėžinyje atkarpa CC'' eina per tašką B . Lengva pastebėti, kad šiuo atveju mūsų samprotavimai netinka ir trikampiai gali būti visiškai skirtingi, kaip tai ir parodyta 14 brėžinyje.

Kitas labai pamokantis panašaus tipo klaidos pavyzdys yra teoremos apie pasvirusios prizmės šoninį paviršių ir apie stačiosios bei pasvirusios prizmių tūrių lygybę (šias klaidas galite rasti senesniuose mokykliniuose A. Ki-

seliovo ir kituose vadovėliuose). Pirmoje iš šių teoremų tvirtinama: „Prizmės šoninis paviršius lygus statmenojo piūvio perimetro ir šoninės briaunos sandaugai“. Antroje

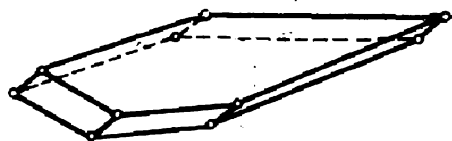


14 brėž.

teoremoje sakoma: „Pasvirusi prizmė yra lygiatūrė su tokia stačiąja prizme, kurios pagrindas yra lygus pasvirusios prizmės statmenajam piūviui, o aukštinė — jos šoninei briaunai. Tačiau neretai ir viena, ir kita teoremos įrodomos tik atskiru atveju, būtent, kai prizmės briaunos tiek ilgos, kad prizmėje galima padaryti statmenąjį piūvį. Tačiau egzistuoja ir ištisa klasė tokių prizmių, kuriose statmenojo piūvio, kertančio visas šonines briau-

nas, padaryti negalima. Tai smarkiai pasvirusios prizmės su labai maža aukštine (15 brėž.). Tokios prizmės piūvis, statmenas vienai šoninei briaunai, nekerta visų likusių briaunų, todėl visi samprotavimai, kuriais įrodinėja-

15 brėž.



mos minėtos teoremos, pasirodo nebetinka. Šiuo atveju klaida daroma todėl, kad nuo seno įprasta vaizduoti prizmę kaip strypą su pakankamai ilga aukštine, o žemos „lentelinės“ prizmės beveik niekuomet nebraižomos nei lentoje, nei sąsiuvinyje, nei vadovėlyje. Iš šio pavyzdžio taip pat matome, kaip atsargiai turime žiūrėti į brėžinį, kuriuo naudojames įrodinėdami. Kiekvieną kartą, ką nors braižydami įrodymo eigoje, visuomet turime paklausti savęs: „Ar visais atvejais galima šitaip braižyti?“ Jeigu šitoks klausimas būtų kilęs, įrodinėjant minėtus teiginius

apie pasvirąją prizmę, tai lengvai būtų rasta tokių prizmių pavyzdžių, kuriose statmenojo piūvio padaryti negalima.

7. Dviejų paskutinių pavyzdžių klaida yra ta pati — *įrodomas ne tas teiginys, kurį reikia įrodyti, o tik atskiras atvejais*, susijęs su figūros, kuria remiamasi įrodinėjant, savybėmis. Galima pateikti dar vieną pavyzdį, klaida jame panaši, tik giliau paslėpta ir ne taip krinta į akis.

Kalbėsime apie nebendramačių atkarpų egzistavimo įrodymą. Glaustai pateiksime bendrą įrodinėjimo eigą. Pradžioje apibrėžiamas dviejų atkarpų bendrasis matas ir nustatoma, kad šį bendrąjį matą galima atidėti sveiką skaičių kartų ant tų atkarpų sumos ir skirtumo. Po to pateikiamas metodas bendram matui rasti, kurį jau žinojo Euklidas. Daroma šitaip: mažesnė atkarpa atidedama, kol telpa ant didesnės, pirmoji liekana atidedama ant mažesnės atkarpos, antroji liekana — ant pirmosios liekanos ir t.t. Liekana, kuri sveiką skaičių kartų telpa prieš tai buvusioje liekanoje ir yra duotųjų atkarpų didžiausias bendrasis matas. Toliau pažymima, kad atkarpos, turinčios bendrąjį matą, vadinamos *bendramatėmis*, o neturinčios bendrojo mato — *nebendramatėmis*. Tačiau jau patį faktą, kad egzistuoja nebendramatės atkarpos, reikia teoriškai įrodyti — rasti bent vieną porą tokių atkarpų. Kaip nebendramačių atkarpų pavyzdys paprastai nurodomos kvadrato įstrižainė ir jo kraštinė. Įrodoma Euklido metodu: nuosekliai atidedant kvadrato kraštinę ant jo įstrižainės, liekaną — ant kraštinės ir t. t. Čia paaiškėja, kad įstrižainės ir kraštinės skirtumas yra naujo kvadrato kraštinė, o ją vėl reikia atidėti ant naujos įstrižainės ir t. t., vadinasi, toks nuoseklaus atidėjimo procesas niekuomet nesibaigs ir bendro didžiausio mato kvadrato įstrižainei ir jo kraštinei nerasime. Toliau daroma išvada: vadinasi, kvadrato kraštinės ir jo įstrižainės bendro mato rasti negalima, taigi šios atkarpos nebendramatės.

Kur šios išvados klaida? Klaida ta, jog iš to, kad Euklido metodu negalima rasti bendrojo

matoma, dar neišplaukia, kad šis bendras matas neegzistuoja. Jeigu kokio nors daikto negalime rasti, ieškodami vienokiu būdu, tai dar nereiškia, kad šio daikto ir nėra (gal jį galima rasti kitais būdais?). Mes niekaip negalėtume sutikti su šitokiu samprotavimu: „Jokiu mikroskopu negalima pamatyti elektronų, vadinasi, elektronai neegzistuoja“. Aišku, pastarajam samprotavimui labai lengva paprieštarauti: „Be mikroskopo, egzistuoja kitos priemonės ir metodai, kuriais galime įsitikinti, kad elektronai egzistuoja“.

Kad įrodymas apie nebendramačių atkarpų egzistavimą būtų pilnas, reikia iš anksto įrodyti šitokią teiginį:

jeigu dviejų atkarpų didžiausio bendrojo mato radijo procesas gali tęstis be galo, tai tokios atkarpos nebendramatės.

Įrodysime šį svarbų teiginį. Tarkime, kad duotos atkarpos $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ (raidėmis su brūkšneliais viršuje žymėsime atkarpas, o raidėmis be brūkšnelių — skaičius), be to, $\bar{a} > \bar{b}$. Tarkime, kad, nuosekliai atidėję $\bar{b}$ ant $\bar{a}$, pirmąją liekaną $\bar{r}_1$ ant $\bar{b}$ ir t. t., gavome neaprežtą liekanų seką: $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots$, kurioje kiekviena pirmesnė liekana didesnė už sekančią. Taigi gavome:

$$\bar{a} > \bar{b} > \bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \bar{r}_3 \dots$$

Tarsime, kad atkarpos $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ turi bendrą matą p , kuris pagal bendro mato savybę sveiką skaičių kartų telpa atkarpose $\bar{a}, \bar{b}$ ir kiekvienoje iš liekanų $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots$. Atidedame šį matą m kartų atkarpoje $\bar{a}$, n kartų atkarpoje $\bar{b}$, n_1 kartų — $\bar{r}_1$, n_2 kartų — $\bar{r}_2$, $\dots$, n_k kartų — $\bar{r}_k$ ir t. t. Skaičiai $m, n, n_1, n_2, n_3, \dots$ — sveiki teigiamieji, be to, iš atkarpų nelygybės gausime atitinkamas skaičių nelygybes:

$$m > n > n_1 > n_2 > n_3 \dots$$

Kadangi tarėme, jog atkarpų seka begalinė, tai ir skaičių $m, n, n_1, n_2, n_3 \dots$ seka taip pat turi būti begalinė, o t a i

neįmanoma, nes nuosekliai mažėjanti sveikų teigiamų skaičių seka negali būti begalinė. Gautas prieštaravimas verčia atsisakyti teiginio, kad egzistuoja tokių atkarpų bendrasis matas — turime pripažinti jas nebendramatėmis. Pavyzdyje su kvadratu įsitikinome, kad egzistuoja tokios atkarpos, kurioms nuoseklaus atidėjimo procesas nesibailgia,— vadinasi, kvadrato įstrižainė nebendramatė su jo kraštine.

Be šio papildomo teiginio įrodymas, kad egzistuoja nebendramatės atkarpos, yra netikslus: įrodomas ne tas teiginys, kurį reikia įrodyti.

8. Labai dažnai įrodymuose daroma kitokio tipo klaidų: remiamasi teiginiu, kuris dar neįrodytas. Pasitaiko, nors ir nedažnai, kad įrodinėtojas remiasi kaip tik tuo teiginiu, kurį jis įrodinėja. Pavyzdžiui, kartais galima girdėti tokį mokytojo ir mokinio pokalbį. Mokytojas klausia: „Kodėl šios tiesės statmenos?“ Mokinys atsako: „Todėl, kad kampas tarp jų status“,—„O kodėl kampas status?“— „Todėl, kad tiesės statmenos“.

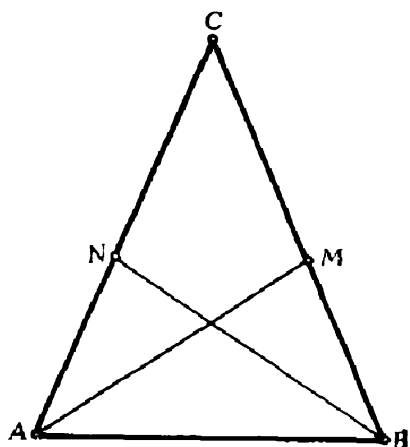
Panaši klaida vadinama „užburtu įrodymo ratu“. Toks primityvus ratas sutinkamas labai retai, dažniausiai ši klaida būna paslėpta. Pavyzdžiui, mokiniui buvo duota įrodyti, kad trikampiai, kurių dvi pusiaukampinės lygios, yra lygiašoniai.

Įrodoma buvo šitaip: „Tarkime, kad trikampio ABC pusiaukampinė AM lygi pusiaukampinei BN (16 brėž.). Pradžioje nagrinėsime $\triangle ABM$ ir $\triangle ABN$, kurie yra lygūs, nes $AM=BN$, AB — bendra ir $\angle ABN=\angle BAM$ kaip lygių kampų prie pagrindo pusės. Taigi $\triangle ABM=\triangle ABN$, vadinasi, $AN=BM$. Toliau nagrinėsime $\triangle ACM$ ir $\triangle BCN$, kurie taip pat lygūs, nes $AM=BN$ ir atitinkamai lygūs kampai, esantys prie šių kraštinių. Todėl $CN=CM$, vadinasi, $AN+NC=BM+CM$, t. y. $AC=BC$, o tai ir reikėjo įrodyti“.

Šio įrodymo klaida yra ta, kad remiamasi kampų prie trikampio pagrindo lygybe. Tačiau šių kampų lygybė iš-

plaukia iš to, kad trikampis lygiašonis,— butent iš to teiginio, kurį reikia įrodyti.

Būna ir tokių atvejų, kai įrodinėjant remiamasi neįrodytais teiginiais, laikant juos akivaizdžiais, nors šie teiginiai ir nėra aksiomos. Išnagrinėsime du pavyzdžius. Mokantis apie tiesės ir apskritimo tarpusavio padėtį, nagrinėjami trys atvejai: 1) tiesės atstumas nuo apskritimo



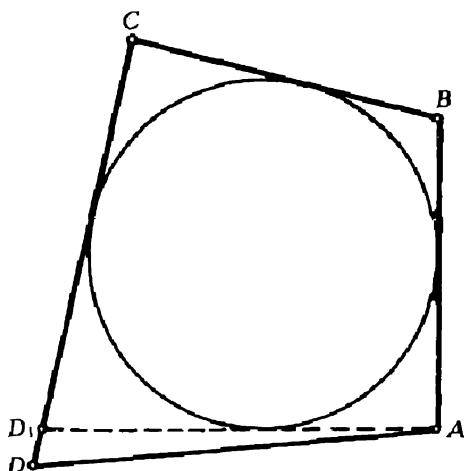
16 brėž.

centro didesnis už spindulį — tiesė eina šalia apskritimo; 2) tiesės atstumas nuo centro lygus spinduliui — tiesė su apskritimu turi vieną ir tik vieną bendrą tašką (liestinė); 3) tiesės atstumas nuo centro mažesnis už spindulį — tiesė su apskritimu turi du bendrus taškus (kirstinė).

Du pirmieji teiginiai paprastai teisingai įrodomi, o trečiuoju atveju neretai sakoma: „Tiesė eina per tašką, esantį viduje skritulio ir tada, a i š k u, tiesė kerta apskritimą“. Tačiau nesunku pastebėti, kad šiame samprotavime žodis „aišku“ slepia labai svarbų geometrijos teiginį: „Bet kuri tiesė, einanti per skritulio vidaus tašką, kerta apskritimą“. Tiesa, šis teiginys pakankamai akivaizdus, bet mes jau įsitikinome, kokia miglota ir neapibrėžta yra sąvoka „akivaizdumas“. Todėl šį teiginį arba reikia įrašyti į aksiomų skaičių, arba įrodyti, remiantis kitais teiginiais.

Kaip antrą pavyzdį imsime atvirkštinės teoremos apie apibrėžtą keturkampį įrodymą, duodamą kai kuriuose elementarinės geometrijos vadovėliuose. Taigi reikia įrodyti: *jeigu keturkampio priešingų kraštinių sumos lygios, tai į šį keturkampį galima įbrėžti apskritimą.*

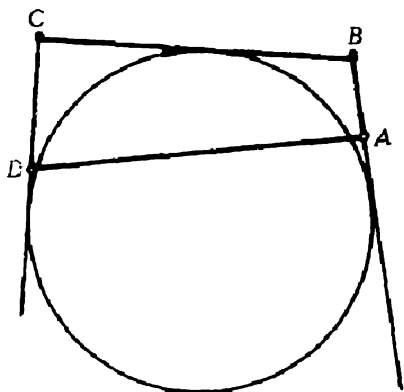
17 brėž.



Pateiksime šitokį įrodymą: „Duota: $AB + CD = BC + AD$ (17 brėž.). Brėžiame apskritimą, kuris liečia kraštines AB , BC ir CD . Įrodysime, kad jis lies ir kraštinę AD . Tarkime, kad jis nepalietė kraštinės AD . Iš taško A vedame liestinę AD_1 , gauname apibrėžtą keturkampį $ABCD_1$. Pagal tiesioginę teoremą $AB + CD_1 = BC + AD_1$. Atimdami šią lygybę panariui iš duotosios, gauname: $CD - CD_1 = AD_1 - AD$, arba $DD_1 = AD_1 - AD$, o taip negali būti (trikampio ADD_1 dviejų kraštinių skirtumas negali būti lygus trečiajai). Vadinasi, apskritimas, liečiantis kraštines AB , BC ir CD , liečia ir kraštinę AD “.

Šio įrodymo klaida ta, kad remiamasi dar neįrodytomis žiniomis apie taško A padėtį: pradžioje reikia įrodyti, kad *apskritimo lietimosi taškas yra tarp taškų A ir B* . Jei gu taškai A ir D bus išsidėstę taip, kaip parodyta 18 brėžinyje, tai jiems negalėsime pritaikyti samprotavimų, kuriais grindžiamas įrodymas. Įrodyti, kad lietimosi taškai yra tarp taškų A ir B ir tarp C ir D , galima, bet tai gana

sudėtinga, todėl geriau naudotis anksčiau (žr. 21 psl.) pateiktuoju įrodymu.



18 brėž.

Tuo būdu, į klausimą, kokius reikalavimus turi atitikti įrodymas, kad jis būtų teisingas, t.y. kad galėtume neabejoti įrodomo teiginio teisingumu, turime atsakyti šitaip:

1. Įrodymas turi būti pagrįstas tik teisingais teiginiais, t.y. aksiomomis ir anksčiau įrodytomis teoremomis.

2. Visi samprotavimai, iš kurių susideda įrodymas, turi būti teisingi.

3. Visuomet reikia turėti galvoje įrodymo tikslą — nustatyti, ar teisingas įrodomasis teiginys, ir nepakeisti šio teiginio koku nors kitu*.

9. Ryšium su šiais reikalavimais iškyla klausimas: o kaip rasti teisingus įrodymus?

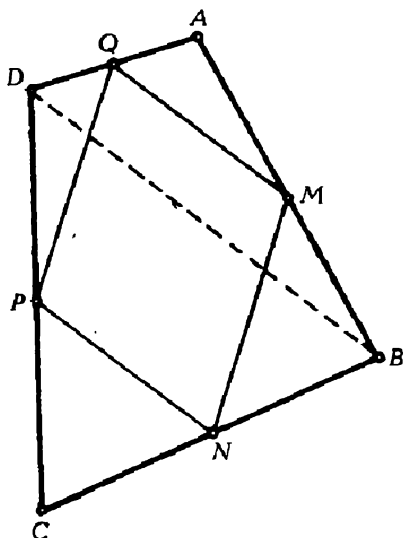
Duosime šiuo klausimu keletą patarimų. Pirmiausia, kai mums reikia įrodyti kokį nors geometrijos teiginį, privalome visiškai aiškiai išskirti jo pagrindinę mintį, kurią ir reikia įrodinėti. Labai dažnai ši mintis būna nepakankamai aiškiai išreikšta. Pavyzdžiui, turime šitokį uždavinį: „Reikia įrodyti, kad, nuosekliai sujungę keturkampio kraštinių vidurius, gausime lygiagretainį“. Kaip galima įrodyti, kad gaunamas lygiagretainis? Prisiminkime lygiagretainio apibrėžimą: tai — keturkampis,

* Kaip kad atsitiko 29 psl. aprašytame pavyzdyje.

kurio priešingos kraštinės yra lygiagrečios. Vadinasi, mums reikia įrodyti, kad gautosios atkarpos lygiagrečios.

Kai jau išskirtas teiginys, kurį turime įrodyti, reikia iš teoremos teksto išskirti duotas sąlygas, kurios būtinos įrodymui. Pateiktame pavyzdyje pasakyta, kad jungiame keturkampio kraštinių vidurius — tai reiškia, kad ant keturkampio kraštinių imame taškus, dalijančius kiekvieną kraštinę į lygias dalis.

19 brėž.



Visa tai apiforminsime simboliniu užrašymu, kuris paprastai naudojamas mokyklose, su žodžiais „Duota“ ir „Reikia įrodyti“. Taigi mūsų pavyzdyje, jeigu turime keturkampį $ABCD$ (19 brėž.), o M, N, P, Q — jo kraštinių viduriai, tai teoremą galima užrašyti šitaip:

Duota: keturkampyje $ABCD$ $MA=MB$, $NB=NC$, $PC=PD$, $QD=QA$.

Reikia įrodyti: $MN \parallel PQ$, $MQ \parallel NP$.

Po to įrodome teoremą. Įrodydami turime naudotis anksčiau nustatytomis aksiomomis ir teoremomis, o kartu (tai reikia ypač gerai atsiminti) tais specialiais santykiais, kurie nurodyti teoremos sąlygoje.

10. Bet kaipgi sudaryti tokią išprotavimų seką, kuria susietume įrodomąjį teiginį su anksčiau nustatytomis

tiesomis ir su teoremos sąlygomis? Kaip iš daugelio įvairių teiginių parinkti būtent tuos, kurie padės įrodyti teoremą?

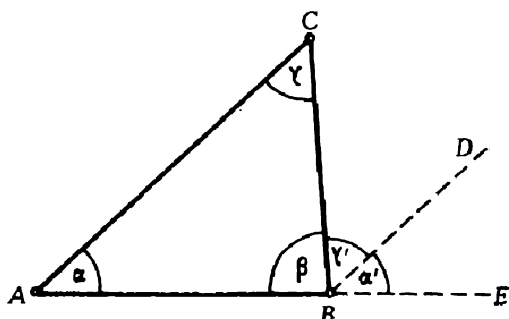
Protingiausia ieškojimų išeities tašku imti teiginį, kurį reikia įrodyti, ir kelti klausimą: kokio teiginio išvada gali būti įrodomasis teiginys? Jeigu rasime tokį teiginį ir jeigu jis išplauks iš sąlygos ir anksčiau įrodytų teoremų, tai uždavinys išspręstas. Jeigu šito nebus, tai vėl kelsime tą patį klausimą, tik dabar jau šiam naujam teiginiui, ir t. t. Toks mąstymo kelias moksle vadinamas *analize*.

Pastarajame pavyzdyje apie keturkampį reikia įrodyti kai kurių atkarpų lygiagretumą. Kartu prisimename, kad šios atkarpos jungia keturkampio kraštinių vidurius. Žinodami tai, klausiame savęs: ar tarp anksčiau įrodytų teiginių nėra tokio, kuriame būtų kalbama apie lygiagretumą atkarpų, jungiančių daugiakampio kraštinių vidurius? Vienas iš tokių teiginių yra teorema apie trikampio vidurio liniją: joje sakoma, kad atkarpa, jungianti trikampio dviejų kraštinių vidurius, yra lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei. Beje, nagrinėjamojoje figūroje trikampių nėra, tačiau nesunku juos nubrėžti. Nubrėšime, pavyzdžiui, įstrižainę BD . Tuomet iš karto gausime du trikampius — ABD ir BCD , o atkarpos MQ ir NP bus jų vidurinės linijos. Taigi $MQ \parallel BD$ ir $NP \parallel BD$; vadinasi, $NP \parallel MQ$. Išvedę antrąją įstrižainę, panašiu būdu įrodysime, kad ir $MN \parallel PQ$. Tarp kitko, antrąją įstrižainę brėžti nebūtina, nes iš pirmosios trikampių poros matome, kad $MQ = \frac{1}{2} BD$ ir $NP = \frac{1}{2} BD$; vadinasi, $MQ = NP$, t. y. keturkampio $MNPQ$ priešingos kraštinės MQ ir NP ne tik lygiagrečios, bet ir lygios, o iš čia jau išplaukia, kad šis keturkampis — lygiagretainis.

Kaip antrą pavyzdį imsime žinomą teoremą apie trikampio vidaus kampus. Šiuo atveju teoremos tekste nėra

jokių specialių sąlygų, todėl reikia užrašyti tik tai, ką reikia įrodyti: trikampyje ABC (20 brėž.) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

20 brėž.



Iš įrodomo teiginio turinio matome, kad būtinai reikia sudėti tris trikampio vidaus kampus. Šią sudėtį tiksliausia atlikti pačiame brėžinyje. Prie viršūnės B kampo β nubrėšime kampą $\gamma' = \gamma$. Tuomet kampo γ' kraštinė BD bus lygiagreti AC , nes lygūs vidaus kryžminiai kampai prie kirstinės BC . Pratęsę kraštinę AB už taško B , gausime $\angle CBE$, kurį žymėsime α' . $\alpha' = \alpha$, kaip atitinkamieji kampai prie tų pačių lygiagrečių ir kirstinės AB . Taigi gavome: $\alpha' + \beta + \gamma' = 180^\circ$, nes šie kampai kartu sudaro ištiestinį kampą. Kadangi $\alpha' = \alpha$, $\gamma' = \gamma$, gauname reikalingą lygybę

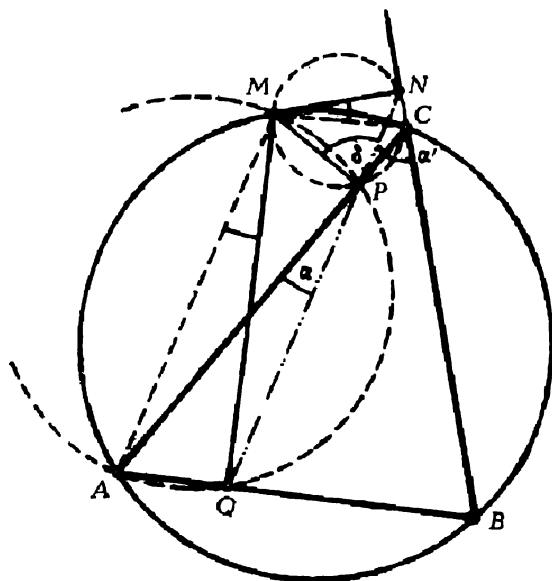
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Abiejuose pavyzdžiuose gana greitai radome reikalingus ryšius. Bet būna ir tokių atvejų, kai šiam ryšiui nustatyti prireikia visos eilės pagalbinių teiginių. Tuomet analizė būna ilgesnė ir sudėtingesnė.

11. Pateiksime sudėtingesnės analizės pavyzdį. Reikia įrodyti šitokį teiginį. *Jeigu apie trikampį apibrėšime apskritimą ir iš jo laisvai pasirinktojo taško nuleisime į trikampio kraštinės statmenis, tai jų pagrindai bus vienoje tiesėje (Simpsono tiesė).*

Atliksime analizę. Tarkime, kad duotas trikampis ABC (21 brėž.), M — apibrėžto apskritimo taškas, N , P , Q — šio taško projekcijos atitinkamai duotojo trikampio kraštinėse BC , CA , AB . Reikia įrodyti, kad N , P ir Q yra

vienoje ir toje pačioje tiesėje. Įrodomąjį teiginį nesunkiai galima užrašyti, nes sąlyga, kad taškai N, P, Q yra vienoje tiesėje tolygi sąlygai, jog kampas NPQ — ištiestinis.



21 brėž.

Duota: $MN \perp BC$, $MP \perp CA$, $MQ \perp AB$; taškas M yra apskritime, apibrėžtame apie trikampį ABC .

Reikia įrodyti: $\angle NPQ = 180^\circ$. Nagrinėdami kampą NPQ , matome, kad jis sudarytas iš $\angle MPN = \delta$, $\angle MPA = 90^\circ$ ir $\angle APQ = \alpha$. Teiginys būtų įrodytas, jeigu pavyktų įrodyti, kad $\angle NPQ = \delta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$. Tačiau tam užtenka įrodyti, kad $\alpha + \delta = 90^\circ$. Išnagrinėsime $\angle CPN = \alpha'$. Kadangi $\angle MPC = 90^\circ$, tai $\alpha' + \delta = 90^\circ$. Jeigu pavyktų įrodyti, kad $\alpha' = \alpha$, tai teorema būtų įrodyta. Šią lygybę pabandysime gauti, nagrinėdami naujus kampus, ir tam pasinaudosime teoremos sąlyga. Statūs kampai ir APM ir AQM remiasi į atkarpą AM , todėl apskritimas, nubrėžtas taip, kad AM būtų jo skersmuo, eis per taškus P ir Q . Pagal įbrėžtų kampų savybę $\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$. Panašiai nubrėžę apskritimą, kurio skersmuo MC , matysime, kad jis eis per P ir N , ir pagal įbrėžtų kampų savybę $\angle CMN = \angle CPN' = \alpha'$. Dabar pabandysime įrodyti, kad

$\angle AMQ = \angle CMN$. Pastebėsime, kad keturkampis $ABCM$ —įbrėžtas, todėl jo priešingų kampų suma lygi 180° :

$$\angle AMC + \angle B = 180^\circ,$$

$$\text{arba } \angle AMQ + \angle QMC + \angle B = 180^\circ. \quad (1)$$

Be to, keturkampyje $BQMN$ kampai prie viršūnių Q ir N statūs, todėl kitų dviejų kampų suma lygi 180° :

$$\angle QMN + \angle B = 180^\circ,$$

$$\text{arba } \angle QMC + \angle CMN + \angle B = 180^\circ. \quad (2)$$

Palyginę (1) ir (2) lygybes, gausime:

$$\angle QMC + \angle CMN + \angle B = \angle AMQ + \angle QMC + \angle B;$$

iš čia

$$\angle CMN = \angle AMQ,$$

t. y.

$$\alpha' = \alpha.$$

Iš čia, kaip jau matėme, išplaukia, kad $\alpha + \delta = 90^\circ$, $\alpha + \delta + 90^\circ = 180^\circ$ ir, pagaliau, $\angle NPQ = 180^\circ$.

Jeigu reikėtų nuosekliai išdėstyti įrodymo eigą, tai tektų eiti atbuliniu keliu: pradžioje įrodytume, kad $\angle AMQ = \angle CMN$, toliau nustatytume lygybę

$$\angle AMQ = \angle MQN \text{ ir } \angle CMN = \angle CPN.$$

Pagaliau iš to, kad $\angle CPA = \angle CPN + \angle MPN + 90^\circ = 180^\circ$, gautume, kad ir $\angle NPQ = \angle MPN + 90^\circ + \angle APQ = 180^\circ$, t. y. kad taškai N , P ir Q yra vienoje tiesėje.

Šis analizei atvirkščias įrodymo kelias, kuriuo paprastai įrodinėjamos teoremos vadovėliuose ir klasėje, vadinamas *sintezė*. Teoremą įrodinėti sintezės būdu paprasčiau ir lengviau, bet nereikia pamiršti, kad, ieškodami įrodymo, turime būtinai naudotis analize.

Taigi, analizė ir sintezė — dvi neatskiriamos vieno ir to paties įrodymo proceso stadijos. Analizė yra įrodymo

suradimo metodas, o sintezė — įrodymo išdėstymo metodas.

Be abejo, ieškant kokio nors teiginio įrodymo, ne visuomet pavyksta rasti reikiamą išprotavimų seką. Ne visuomet iš karto pasirenkamas teisingas kelias — kartais tenka atsisakyti numatyto būdo ir pereiti prie kito.

Pateiksime pavyzdį. Tarkime, kad reikia įrodyti teiginį: „Jeigu trikampio dvi pusiaukraštinės tarpusavyje lygios, tai šis trikampis — lygiašonis“. Duotas trikampis ABC , kurio pusiaukraštinės AM ir BN yra lygios. Pradžioje galima pamanyti, kad tikslinga išnagrinėti trikampius AMB ir ABN ir įrodyti jų lygybę. Tačiau nesunku pastebėti, kad tokiam įrodymui neturime pakankamai duomenų: žinome tik, kad $AM=BN$ ir kad kraštinė AB yra bendra abiem trikampiams. Nei kampų lygybė, nei trečiųjų kraštinių lygybė neduota. Todėl šio kelio teks atsisakyti. Lygiai taip pat įsitikinsime, kad nėra prasmės nagrinėti trikampius ACM ir BCN , nes ir šių trikampių lygybei įrodyti per mažai turime duomenų. Atsisakę nagrinėti šiuos trikampius, paieškosime naujo kelio. Raide P pažymėsime pusiaukraštinių susikirtimo tašką ir panagrinėsime trikampius ANP ir BMP . Kadangi pusiaukraštinės yra lygios ir taškas P atkerta vieną trečiąją kiekvienos pusiaukraštinės, tai $PN=PM$, $PA=PB$ ir $\angle APN=\angle BPM$, kaip statūs kampai. Vadinasi, $\angle ANP=\angle BNP$, todėl $AN=BM$. Kadangi šios atkarpos yra atitinkamų kraštinių pusės, tai ir $AC=BC$, o tai ir reikėjo įrodyti.

Sugebėjimas analizuoti ir savarankiškai sudaryti įrodymą, atsiranda sistemingai „treniruojantis“ — sprendžiant įrodymo uždavinius.

12. Baigdami šį skyrių, atkreipsime dėmesį į tai, kad bet kokią teoremą galima įrodyti dviem būdais — tiesioginiu ir netiesioginiu.

Įrodinėdami tiesioginiu būdu, teiginio teisingumu įsitikiname, nustatę tiesioginį ryšį tarp šio teiginio ir anksčiau įrodyto.

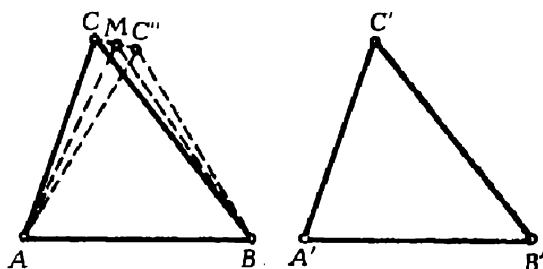
Įrodinėdami netiesioginiu (atvirkštinio) būdu, įsitikiname, kad, suabejoję įrodomo teiginio teisingumu ir laikydami jį klaidingu, gauname teiginį, prieštaraujantį sąlygoms arba anksčiau įrodytiems teiginiams. Todėl atvirkštinis įrodymas dar vadinamas įrodymas priešingybės būdu.

Anksčiau, kiek buvo galima, naudojomes tiesioginiu įrodymu. Dabar pateiksime atvirkštinio įrodymo pavyzdžių.

Kaip pirmą pavyzdį imsime trikampių lygybės trečiąją požymį. Dažnai sakoma, kad šį požymį įrodyti, uždedant vieną trikampį ant kito, neparanku, nes nieko nežinome apie kampų lygybę. Tačiau, atvirkštinio metodu ir šį požymį galima įrodyti, uždedant trikampius vieną ant kito.

Taigi tarkime, kad ABC ir $A'B'C'$ — duotieji trikampiai (22 brėž.), kurių $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $AB = A'B'$. Įro-

22 brėž.



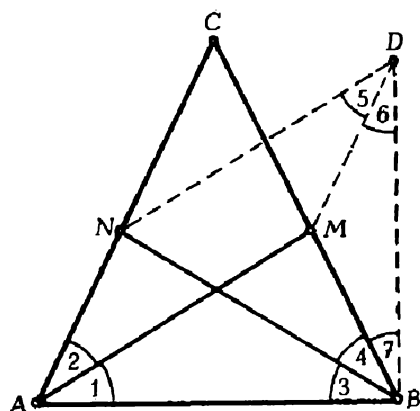
dymui uždėsime $\triangle A'B'C'$ ant $\triangle ABC$ taip, kad kraštinė $A'B'$ sutaptų su AB . Kadangi mes nieko nežinome apie kampų lygybę, tai negalime tvirtinti, kad taškas C' sutaps su tašku C . Todėl tarsime, kad jis užims padėtį C'' . Sujungsime taškus C ir C'' . $\triangle ACC''$ lygiašonis (iš sąlygos $AC'' = AC$), $\triangle BCC''$ — taip pat (iš sąlygos $BC'' = BC$). Lygiašonio trikampio ACC'' aukštinė AM eis per tašką M — kraštinės CC'' vidurį (nes lygiašonio trikampio aukštinė sutampa su pusiaukraštine). Lygiašonio trikampio BCC'' aukštinė BM eis per kraštinės CC'' vidurio tašką M . Taigi

gavome, kad iš taško M iškelti du statmenys į tiesę CC'' — AM ir BM . Sutapti šie statmenys negali, nes tuomet taškai A , B ir M būtų vienoje tiesėje, o šito negali būti, nes taškai C ir C'' (o tuo pačiu ir visa atkarpa) yra vienoje kraštinės AB pusėje.

Kaip matome, tarę, kad taškai C ir C' nesutampa, gauname išvadą, jog iš vieno ir to paties taško M galima nubrėžti du skirtingus statmenis į tiesę CC'' . Bet tai prieštarauja anksčiau nustatytoms statmens savybėms. Vadinasi, uždedant trikampius, taškas C' turi sutapti su tašku C , ir gauname, kad $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Kaip antrą pavyzdį panagrinėsime šį ankstesnį teiginį: jeigu trikampio dvi pusiaukampinės lygios, tai toks trikampis lygiašonis.

Tarkime, kad duotas $\triangle ABC$ ir jo pusiaukampinės AM ir BN (23 brėž.).



23 brėž.

Užrašysime teoremą. Duota: $\triangle ABC$; $\angle CAM = \angle BAM$; $\angle CBN = \angle ABN$ ir $AM = BN$.

Reikia įrodyti: $AC = BC$.

Įrodymą atliksime priešingybės būdu. Tarsime, jog trikampis nelygiašonis ir $AC > BC$. Jeigu taip, tai ir $\angle ABC > \angle CAB$. Sunumeravę kampus, kaip parodyta brėžinyje, gauname, kad $\angle 3 > \angle 1$. Palyginsime dabar $\triangle ABM$ ir $\triangle ABN$; AB yra bendra, $AM = BN$ iš sąlygos, o kampai,

esantys tarp atitinkamai lygių kraštinių, nelygūs. Vadinasi, prieš didesnę kampą guli didesnė kraštinė, t.y. $AN > BM$. Dabar per tašką N nubrėšime atkarpą ND , lygią ir lygiagrečią AM . Tuomet keturkampis $AMDN$ bus lygiagretainis, vadinasi, $MD = AN$ ir $\angle 5 = \angle 2$. Sujungę B su D , gausime $\triangle BDN$, kuris bus lygiašonis, nes $ND = AM = BN$. Iš kitos pusės, trikampio BDM kraštinė $MD = AD$, bet $AN > BM$, vadinasi, $MD > BM$ ir iš čia $\angle 7 > \angle 6$. Kartu $\angle 4 > \angle 5$, nes $\angle 5 = \angle 2 = \angle 1$, o $\angle 4 = \angle 3$, bet $\angle 3 > \angle 1$. Jeigu panariui sudėsime nelygybes $\angle 7 > \angle 6$ ir $\angle 4 > \angle 5$, tai gausime: $\angle 4 + \angle 7 > \angle 5 + \angle 6$, t.y. $\angle BDN > \angle DBN$. Gavome, kad lygiašonio trikampio BDN kampai prie pagrindo nelygūs. Gautas prieštaravimas verčia atsakyti prielaidos, kad $AC > BD$. Panašiu būdu galima paneigti prielaidą, kad $BC > AC$. Taigi $AC = BC$.

Iš pateiktų pavyzdžių gana aiškiai matome atvirkštinio įrodymo pobūdį. Toks įrodymas naudojamas paprastai tada, kai tiesiogiai įrodyti sunku, o kai kada neįmanoma.

Šiuo atveju imamas teiginys, prieštaraujantis tam, kas turi būti įrodyta, ir analizės keliu stengiamasi rasti tokią išvadų seką, kuria prieitume prie teiginio, aiškiai prieštaraujančio kuriam nors iš anksčiau nustatytų teiginių. Tokius aiškiai prieštaraujančius teiginius ir gavome dviejuose paskutiniuose pavyzdžiuose: pirmu atveju — kad per vieną tašką į tiesę galima nubrėžti du statmenis, o antru atveju — kad lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo nelygūs.

§ 4. KOKIUS GEOMETRINIUS TEIGINIUS GALIMA PRIIMTI BE ĮRODymo?

1. Dabar atsakysime į paskutinį įvade iškeltą klausimą: kokius geometrijos teiginius galima priimti be įrodymo?

Iš pirmo žvilgsnio šis klausimas atrodo labai paprastas. Kiekvienas pasakys, kad be įrodymo galima priimti aksiomas, o aksiomomis reikia pasirinkti teiginius, kurių teisingumas daug kartų patikrintas ir nekelia jokių abejonių. Tačiau, kad praktiškai pabandome parinkti tokius teiginius, aiškėja, kad tai ne taip jau paprasta.

Šiuo metu yra žinoma daugybė geometrijos teiginių, kurie tiek daug kartų buvo praktiškai tikrinami, kad vargu ar kas gali suabejoti jų teisingumu. Tačiau iš čia dar neišplaukia, kad visus šiuos teiginius reikia pripažinti aksiomomis. Mes neabejojame, pavyzdžiui, kad per du taškus galima praveisti vienintelę tiesę; kad iš duotojo taško į tiesę galima nubrėžti vienintelį statmenį; kad trikampio dviejų kraštinių suma didesnė už trečiąją kraštinę; kad dvi atkarpos, lygios viena ir tai pačiai trečiajai, lygios ir tarpusavyje; kad atstumas tarp dviejų lygiagrečių tiesių visur vienodas ir t. t. Aišku, kad panašių teiginių būtų galima priskaičiuoti ir kur kas daugiau. Kodėl visų panašių teiginių nepripažinus aksiomomis? Tuomet geometrija būtų dėstoma žymiai paprasčiau, nebereikėtų daugelio įrodymų ir t. t.

Tačiau geometrija vystėsi ne tuo keliu; priešingai, geometrai stengėsi kiek įmanoma sumažinti aksiomų skaičių, o visą kitą geometrijos turinį išvesti dedukciniu būdu iš šio nedidelio skaičiaus pagrindinių tiesių.

Kodėl jie pasirinko būtent šį, regis, sunkesnę ir sudėtingesnę geometrijos žinių sistemos kūrimo kelią?

Sukurti geometriją, remiantis mažiausiu aksiomų skaičiumi, siekiama dėl visos eilės priežasčių. Pirmiausia, mažinant aksiomų skaičių, savaime didėja kiekvienos atskiros aksiomos reikšmė; nereikia pamiršti, kad šios aksiomos turi apimti visą būsimą geometriją, kurią reikės iš jų išvesti. Todėl, kuo mažiau bus aksiomų, tuo bendresnės, gilesnės ir svarbesnės erdvės formų savybės atskleis kiekviena atskira aksioma.

Kita svarbi priežastis, dėl kurios mažinamas aksiomų skaičius, yra ta, kad, esant mažiau aksiomų, lengviau patikrinti, ar jos teisingos, be to, ar įvykdomi reikalavimai, kuriuos turi atitikti visa aksiomų sistema (apie juos kalbėsime vėliau).

2. Taigi mums reikia atrinkti kaip galima mažiau pagrindinių, bendriausių ir svarbiausių geometrinių teiginių, kuriuos laikysime aksiomomis. Kuo turime vadovautis atrinkdami? Pirmiausia turime atkreipti dėmesį į tai, kad negalima atrinkinėti paeiliui, nagrinėdami vieną aksiomą po kitos ir nesusiedami su kitomis aksiomomis. Juk turime priimti ne vieną izoliuotą aksiomą, o *visą aksiomų sistemą*, nes tik tokia sistema gali teisingai atspindėti pagrindinių materialaus pasaulio erdvės formų iš tikrųjų egzistuojančias savybes ir tarpusavio santykius.

Natūralu, kad į šitokią sistemą gali būti įjungtos tik daug kartų patikrintos tiesos, atspindinčios bendriausius, pagrindinius erdvės formų dėsningumus.

Toliau, priimdami šitokių aksiomų sistemą, turime pasekti, kad į ją neįeitų vienas kitam prieštaraujantieji teiginiai, nes tokie teiginiai negali būti teisingi tuo pačiu metu. Pavyzdžiui, negali būti toje pačioje sistemoje aksiomos: „Per duotą tašką duotai tiesei galima nubrėžti vieną lygiagretę“ ir „Per duotą tašką duotai tiesei negalima nubrėžti nė vienos lygiagretės“.

Be to, ne tik pačios aksiomos negali prieštarauti viena kitai, bet ir tarp jų išvadų negali būti dviejų prieštaringų teiginių. Šis pagrindinis aksiomų sistemai keliamas reikalavimas vadinamas *neprieštaravimo sąlyga*.

Tačiau greta neprieštaravimo sąlygos dar turime sekti, kad į sudaromą aksiomų sistemą nepatektų toks teiginys, kurį galima įrodyti, remiantis likusiomis aksiomomis. Šis reikalavimas bus visiškai aiškus, prisiminus, kad šią sistemą norime padaryti minimalią, t. y. iš mažiausio skaičių neįrodomų teiginių. Juk jeigu kurį nors teiginį galima

įrodyti, remiantis kitomis aksiomomis, tai jis jau nebe aksioma, o teorema, ir neverta jo įjungti į aksiomų sistemą. Reikalavimas, kad aksioma nebūtų įrodoma su kitų aksiomų pagalba, vadinamas *nepriklausomumo sąlyga*.

Tačiau, norėdami sudaryti minimalią aksiomų sistemą, neturime pulti į kraštutinumą ir šalinti iš jos tokius teiginius, kuriais būtinai turėsime remtis, dėstydami geometriją.

Tai bus trečioji sąlyga, kurią turi tenkinti aksiomų sistema,— *sistemos pilnumo sąlyga*. Tiksliau šią sąlygą galima šitaip suformuluoti: jeigu sistema *nepilna*, tai prie jos visuomet galima prijungti naują teiginį (aišku, teiginį, kuriame naudojamos tos pačios pagrindinės sąvokos, kaip ir likusiose aksiomose), kuris nepriklausys nuo likusių aksiomų ir joms neprieštaraus. Jeigu aksiomų sistema *pilna*, tai bet koks naujas teiginys apie tas pačias sąvokas, kurios minimos aksiomose, prijungtas prie sistemos, bus arba išvada iš tų aksiomų, arba joms prieštaraus.

3. Kad aksiomų sistemos pilnumo, nepriklausomumo ir neprieštaravimo sąlygos būtų akivaizdesnės, galima pateikti paprastą pavyzdį. Tiesa, jis tiksliai neatspindi geometrinių santykių, bet yra pakankamai jiems analogiškas.

Išnagrinėsime pirmojo laipsnio lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą. Sakysime, kad kiekvienas iš sistemos nežinomųjų — tai bet kuri „sąvoka“, kurią reikia apibrėžti, o kiekviena lygtis — tai savos rūšies „aksioma“, kuria nustatomas šių „sąvokų“ tarpusavio santykis.

Taigi tarkime, kad turime sistemą

$$2x - y - 2z = 3,$$

$$x + y + 4z = 6.$$

Ar galime iš šios sistemos rasti nežinomuosius x , y ir z ? Ne, nes čia lygčių skaičius mažesnis už nežinomųjų skaičių. Sistema netenkina *pilnumo sąlygos*.

Pabandysime pataisyti šią sistemą, papildydami ją dar viena lygtimi:

$$2x - y - 2z = 3,$$

$$x + y + 4z = 6,$$

$$3x + 3y + 12z = 18.$$

Atidžiai išnagrinėję gautą sistemą, įsitikinsime, kad įvedus naują lygtį, padėtis nepasikeitė, nes trečioji lygtis paprastai išvedama iš antrosios ir jokių naujų santykių neatspindi. Vadinasi, sistemoje pažeista *nepriklausomumo sąlyga*.

Dabar pakeisime trečiąją lygtį ir išnagrinėsime šitokią sistemą:

$$2x - y - 2z = 3,$$

$$x + y + 4z = 6,$$

$$3x + 3y + 12z = 15.$$

Vėl lengva įsitikinti, kad ši sistema netinka nežinomiesiems rasti.

Iš tikrųjų, padaliję abi paskutinės lygties puses iš 3, gausime lygtį

$$x + y + 4z = 5.$$

Tuo tarpu antroji lygtis yra

$$x + y + 4z = 6.$$

Kuria iš šių lygčių tikėti? Aišku, kad turime *prieštaraujančią* sistemą, iš kurios taip pat negalima rasti nežinomųjų.

Jeigu, pagaliau, išnagrinėsime sistemą

$$2x - y - 2z = 3,$$

$$x + y + 4z = 6,$$

$$2x + y + 5z = 8,$$

tai lengvai įsitikinsime, kad ši sistema turi vienintelį sprendinį ($x=5$, $y=13$, $z=-3$), ji yra neprieštaraujanti,

nepriklausoma ir pilna. Jeigu prie sistemos prirašysime dar ketvirtąją lygtį, siejančią x , y ir z , tai ji arba bus išvada iš duotųjų trijų lygčių, arba joms prieštaraus.

4. Iš čia matome, kad aksiomos, kurios turi būti geometrijos pagrindu, parenkamos ne visai laisvai, o atsižvelgiant į labai svarbius reikalavimus. Būtinų geometrijos aksiomų sistema pradėta sudarinėti dar praeito šimtmečio pabaigoje, ir nors mokslininkai padarė labai daug, bet dar ir šiuo metu negalima laikyti, kad šis darbas galutinai užbaigtas. Sistemingai peržiūrėdami turimą aksiomų sistemą, mokslininkai laikas nuo laiko atranda, kad šioje sistemoje yra nereikalingų, t. y. „priklausomų“, aksiomų, kurios yra išvedamos iš daug paprastesnių ir bendresnių aksiomų, todėl sudėtingi teiginiai su daugeliu sąlygų pakeičiami aksiomomis su mažiau sąlygų ir t. t. Visi šie tyrinėjimai labai svarbūs mokslui, nes jų tikslas — išaiškinti tas bendriausias, giliausias ir svarbiausias erdvės formų savybes, kurios lemia visą geometrijos turinį.

Kad galėtume susipažinti su šiuolaikinės geometrijos aksiomų sistema, pirmiausia pasinaudosime mokykloje dėstoma geometrija ir pažiūrėsime, kokių aksiomų pagrindu ji sukurta ir kokių aksiomų jai trūksta. Apsiribosime planimetrijos aksiomomis.

Dėstant geometrijos kursą mokykloje, pirmiausia išaiškinamos pagrindinės geometrijos sąvokos: kūno, paviršiaus, linijos, taško. Toliau iš visų linijų išskiriama tiesė, o iš visų paviršių — plokštuma. Pirmosiomis mokyklinio kurso aksiomomis nustatomas ryšys tarp taško, tiesės ir plokštumos. Šios aksiomos priklauso *jungimo aksiomų* grupei — pirmajai grupei pilnoje geometrijos aksiomų sistemoje.

Šios grupės aksiomos išryškina, kaip yra susiję tarpusavyje pagrindiniai geometrijos vaizdiniai: keliais taškais apibrėžiama tiesė ir plokštuma, kokiomis sąlygomis esant, tiesė bus plokštumoje ir t. t.

Iš jungimo aksiomų grupės mokykliniame kurse minimos tik dvi:

1. *Per du taškus galima nubrėžti tiesę ir tik tai vieną.*
2. *Jeigu tarp dviejų plokštumos taškų nubrėžta tiesė, tai visi kiti šios tiesės taškai taip pat yra toje pačioje plokštumoje.*

Kartu sąmoningai arba nesąmoningai nuolatos naudojames ir kitomis jungimo aksiomomis; iš jų planimetrijos teiginiams pagrįsti reikalingos dar šitos:

3. *Kiekvienoje tiesėje yra ne mažiau kaip du taškai.* Ši aksioma, kaip matome, tėra labai ribotas reikalavimas. Tačiau toliau, remiantis aksiomomis, bus galima įrodyti, kad tiesėje yra be galo daug taškų.

4. *Plokštumoje yra ne mažiau kaip trys taškai, nesančys vienoje ir toje pačioje tiesėje.* Ši aksioma taip pat reiškia tik minimalų reikalavimą, kuriuo remiantis, toliau bus galima įrodyti, kad plokštumoje yra be galo daug taškų.

5. Pereisime prie antrosios grupės aksiomų, kurių nėra mokykliniame kurse, nors jomis naudotis tenka labai dažnai. Antrosios grupės aksiomos vadinamos *tvarkos aksiomomis*. Šiomis aksiomomis išreiškiami tie dėsniai, nuo kurių priklauso taškų tarpusavio padėtis tiesėje ir taškų bei tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje. Šiomis aksiomomis dažnai naudojames, nors ir to nepastebime. Jeigu, pavyzdžiui, reikia pratęsti atkarpą, tai šitai darome, žinodami, kad atkarpą visuomet galima pratęsti ir į vieną, ir į kitą pusę.

Jeigu sujungiame du taškus, esančius skirtingose tiesės pusėse, tai esame įsitikinę, kad gauta atkarpa kirs šią tiesę. Šituo rėmėmės, pavyzdžiui, įrodinėdami teoremą apie trikampių lygybę, kai lygios dvi kraštinės ir kampas, esantis prieš vieną iš šių kraštinių (žr. 21 brėž.). Dar pavyzdys: esame įsitikinę, kad trikampio vidaus kampo pusiau-kampinė būtinai kirs priešingą kraštinę.

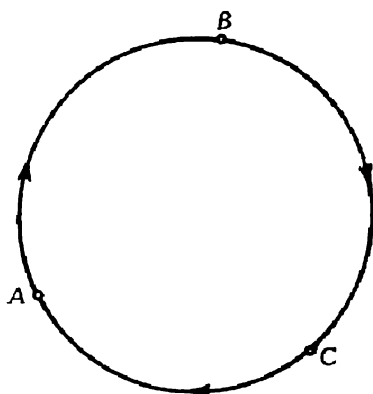
Be abejo, visais šiais atvejais susiduriame su visai aiškiais faktais, bet jie byloja apie tai, kad geometrinės

figūros turi tam tikras pagrindines savybes, kuriomis pastoviai naudojamės ir kurias reikia išdėstyti aksiomose.

Aksiomos, kuriomis nusakoma taškų padėtis tiesėje, susijusios su pagrindinėmis sąvokomis „pirmesnis“ ir „paskesnis“ ir formuluojamos šitaip:

1. *Iš dviejų taškų, esančių toje pačioje tiesėje, bet kurią galima laikyti pirmesniu, tuomet kitas bus paskesnis.*

2. *Jeigu A, B, C — tos pačios tiesės taškai, ir jeigu A pirmesnis už B , B pirmesnis už C , tai A pirmesnis už C .*



24 brėž.

Jau šios dvi aksiomos pakankamai aiškiai nusako esmines tiesės savybes. Jos nėra būdingos visoms linijoms. Imsime, pavyzdžiui, apskritimą (24 brėž.) ir, eidami juo laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi, pažymėsime iš eilės taškus A, B, C ; tuomet įsitikinsime, kad apskritimo taškas A yra pirmiau taško B , taškas B yra pirmiau taško C , o taškas C vėl yra pirmiau taško A . Esant aukščiau nurodytam taškų A, B ir C išsidėstymui tiesėje, sakome, kad B yra tarp A ir C (25 brėž.).

25 brėž.



3. *Tarp bet kurių dviejų tiesės taškų visuomet yra tos pačios tiesės taškas.*

Taikydami nuosekliai šią aksiomą dviem tiesės taškams (jie egzistuoja pagal antrąją jungimo aksiomą), po

to — kiekvienam gautam tarpui ir t.t., įsitikinsime, kad tarp kiekvienų dviejų tiesės taškų yra be galo daug tos tiesės taškų.

Tiesės dalis, kuriai priklauso du jos taškai ir visi tarpiniai taškai, vadinama *atkarpa*.

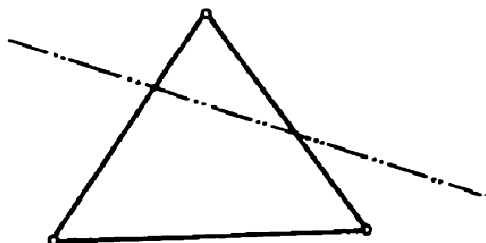
4. *Kiekvienam tiesės taškui yra pirmesnis taškas ir paskesnis taškas.*

Iš šios aksiomos išplaukia galimybė pratęsti tiesę į vieną ir į kitą pusę. Vadinasi, tiesėje nėra tokio taško, kuris būtų pirmesnis už visus kitus jos taškus arba būtų paskiausias iš visų jos taškų: *tiesė neturi galų*.

Dalis tiesės, kurioje yra duotasis taškas ir visi prieš jį pirmesni taškai arba duotasis taškas ir visi paskesni taškai, vadinama *spinduliu*, arba *pustiese*.

Taškų ir tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje nusakoma vadinamąja Pašo aksioma (šiuo vardu buvo vokiečių matematikas, kuris pirmasis ją suformulavo):

26 brėž.



5. *Jeigu duoti trys taškai, nesantys vienoje tiesėje, tai tos pačios plokštumos tiesė, neinanti per šiuos taškus ir kertanti vieną iš atkarpų, jungiančių šiuos taškus, kerta dar vieną ir tik vieną iš likusių šių atkarpų (26 brėž.).*

Remiantis šia aksioma, įrodoma teorema apie plokštumos padalijimą tiese į dvi pusplokštumes. Pateiksime šios teoremos įrodymą kaip tikslaus įrodymo, pagrįsto tik aksiomomis ir anksčiau įrodytais teiginiais, pavyzdį. Teoremą suformuluosime šitaip.

Bet kuri tiesė, esanti plokštumoje, dalija jai nepriklausančius plokštumos taškus į dvi klases taip, kad du tos pačios klasės taškai sujungiami atkarpa, kuri nekerta tiesės.

o du skirtingų klasių taškai sujungiami atkarpa, kuri kerta tiesę.

Įrodydami naudosimės specialiais ženklais, kuriuos būtina atsiminti.

$\subset$ — *priklausymo* ženklas: $A \subset a$ — „taškas A priklauso tiesei a “. $\times$ — *kirtimo* ženklas: $AB \times a$ — „atkarpa AB kerta tiesę a “. Brūkšnys virš kokio nors sąryšio reiškia jo paneigimą: $\overline{A \subset a}$ — „taškas A nepriklauso tiesei a “. $\therefore$ — *išvados* ženklas — „todėl...“

Dabar pereisime prie įrodymo. Pirmiausia pastebėsime, kad *jeigu trys taškai yra vienoje tiesėje, tai jiems teisingas teiginys, analogiškas Pašo aksiomai: tiesė, kertanti vieną iš trijų atkarpų, jungiančių šiuos taškus, taip pat kerta dar vieną ir tik vieną atkarpą*. Šį teiginį lengva įrodyti, remiantis aksioma apie taškų išsidėstymą tiesėje.

Iš tikrųjų, jeigu taškai A , B ir C yra vienoje tiesėje ir taškas B yra tarp A ir C , tai visi atkarpų AB ir BC taškai priklauso atkarpai AC , o kiekvienas atkarpos AC (neįskaitant B) taškas priklauso arba AB , arba BC . Todėl tiesė, kertanti AB arba BC , būtinai kerta ir AC , o tiesė, kertanti AC , kerta arba AB , arba BC .

Tarkime, kad plokštumoje yra tiesė l . Reikia įrodyti štai ką:

1. Su tiese l galima jai nepriklausančius plokštumos taškus padalyti į klases.

2. Klasės gali būti dvi ir tik dvi.

3. Klasės turi teoremoje nurodytas savybes.

Norėdami tai nustatyti, imsime tašką A , nesantį tiesėje l (27 brėž.) ir pasirinksime šitokias sąlygas:

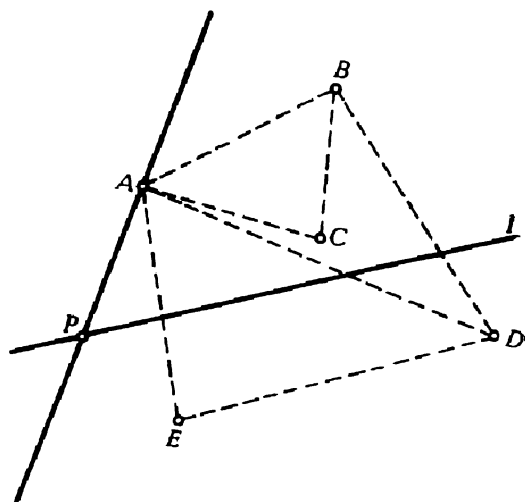
a) taškas A priklauso *pirmajai* klasei (pažymėsime ją K_1);

b) taškas, nepriklausantis tiesei l , priklauso pirmajai klasei, jeigu atkarpa tarp šio taško ir taško A nekerta l ;

c) taškas, nepriklausantis tiesei l , priklauso *antrajai* klasei (pažymėsime ją K_2), jeigu atkarpa tarp to taško ir taško A kerta l .

Lengva įsitikinti, kad egzistuoja ir vienos, ir kitos klasės taškai. Tam tikslui tiesėje l imsime tašką P ir išvesime tiesę PA . Spindulyje, kurio viršūnė yra P ir kuriame yra taškas A , bus tik pirmosios klasės taškai, nes susikirtimo taškas P nepriklauso nė vienai iš atkarpų, jungiančių tašką A su likusiais spindulio taškais. Priešingos krypties spin-

27 brėž.



dulyje su ta pačia viršūne yra tik antrosios klasės taškai, nes susikirtimo taškas P priklauso visoms atkarpoms, jungiančioms tašką A su kitais šio spindulio taškais. Jungdami tašką A su įvairiais tiesės l taškais, gausime be galo daug tiesių, turinčių pirmosios ir antrosios klasės taškus.

Klasės gali būti *tik dvi*, nes apie bet kurią atkarpą, jungiančią A su tašku, nepriklausančiu l , galime pasakyti tik du teiginius: arba atkarpa kerta l , arba nekerta, — trečio atvejo nėra.

Parodysime, pagaliau, kad klasės K_1 ir K_2 tenkina teoremos sąlygas. Išnagrinėsime šitokius atvejus:

1. Abu taškai priklauso pirmajai klasei: $B \in K_1$, $C \in K_1$. Kadangi $B \in K_1$, tai $\overline{AB} \times l$; kadangi $C \in K_1$, tai $\overline{AC} \times l$. $\therefore$, remiantis Pašo aksioma, $\overline{BC} \times l$.

2. Abu taškai priklauso antrajai klasei: $D \subset K_2$ ir $E \subset K_2$. Kadangi $D \subset K_2$, tai $AD \times l$; kadangi $E \subset K_2$, tai $AE \times l$. $\therefore$, remiantis Pašo aksioma, $DE \times l$.

3. Taškai priklauso skirtingoms klasėms: $B \subset K_1$; $D \subset K_2$. Kadangi $BC \subset K_1$, tai $AB \times l$; kadangi $D \subset K_2$, tai $AD \times l$...; remiantis Pašo aksioma, $BD \times l$.

Teorema įrodyta.

Plokštumos dalis, kurioje yra visi vienos ir tos pačios klasės taškai, vadinama *pusplokštume*.

Pastebėsime, kad šią teoremą galima įrodyti, nesinaudojant brėžiniu. Brėžinys tik padeda sekti samprotavimų eigą ir atsiminti gautus santykius. Beje, ši pastaba tinka bet kuriam pakankamai tiksliam įrodymui.

6. Sekančios, trečiosios, grupės aksiomos yra susijusios su *lygybės* sąvoka. Mokykliniame geometrijos kurse figūrų lygybė plokštumoje nustatoma, uždedant vieną figūrą ant kitos.

Mokykliniame geometrijos vadovėlyje šiuo klausimu pasakyta, „kad geometrinės figūros gali judėti erdvėje nekisdamos. Dvi geometrinės figūros vadinamos lygiomis, jeigu, vieną iš jų perkeldami erdvėje, galime taip sutaptinti su kita, kad sutaptų visos abiejų figūrų dalys“.

Iš pirmo žvilgsnio šis lygybės apibrėžimas atrodo visai suprantamas, bet jeigu atidžiau jį panagrinėsime, tai nesunkiai pastebėsime šiame apibrėžime loginį ratą. Iš tikrųjų, norėdami apibrėžti figūrų lygybę, turime jas sutaptinti vieną su kita, o norėdami sutaptinti, turime vieną figūrą *perkelti* erdvėje taip, kad ji *nepakistų*. Bet ką reiškia „nepakistų“? Tai reiškia, kad figūra visą laiką lieka lygi savo pradiniam pavidalui. Taigi, gavome, kad „lygybės“ sąvoką apibrėžiame, naudodamiesi „nekintamos figūros“ perkėlimu, o „nekintamos figūros“ sąvoką apibrėžiame, naudodamiesi „lygybės“ sąvoka.

Štai kodėl kur kas logiškiau figūrų lygybę įrodyti, remiantis grupe aksiomų apie atkarpų, kampų ir trikampių lygybę.

Atkarpų lygybės savybės nustato šitokios aksiomos:

1. *Duotoje tiesėje į vieną pusę nuo duoto taško galima atidėti atkarpą, lygią duotajai, ir tiksliai vieną.*

2. *Kiekviena atkarpa yra lygi pati sau. Jeigu pirmoji atkarpa lygi antrajai, tai ir antroji lygi pirmajai. Dvi atkarpos, lygios tai pačiai trečiajai atkarpai, lygios ir tarpusavyje.*

3. *Jeigu A, B ir C yra vienoje tiesėje, A', B', C' — taip pat vienoje tiesėje ir jeigu $AB = A'B', BC = B'C'$, tai ir $AC = A'C'$.*

Kitaip tariant, jeigu prie lygių atkarpų pridėsime taip pat lygias atkarpas, tai ir sumos bus lygios.

Visiškai analogiškos yra kampų aksiomos.

4. *Kai duotas spindulys, duotoje pusplėštumėje galima nubrėžti kampą, lygų duotajam, ir tiksliai vieną.*

5. *Kiekvienas kampas lygus pats sau. Jeigu pirmasis kampas lygus antrajam, tai ir antrasis lygus pirmajam. Jeigu du kampai lygūs tam pačiam trečiajam kampui, tai jie ir tarpusavyje lygūs.*

6. *Jeigu a, b, c — spinduliai su bendra viršūne, a', b', c' — kiti spinduliai su bendra viršūne ir jeigu $\angle ab = \angle a'b', \angle bc = \angle b'c'$, tai ir $\angle ac = \angle a'c'$.*

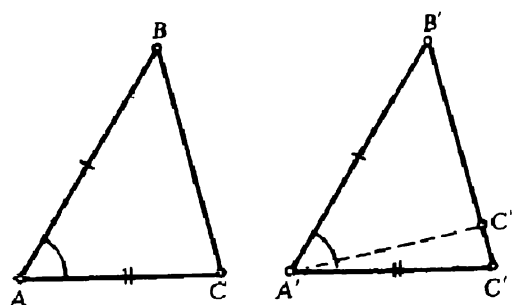
Kitaip tariant, jeigu prie lygių kampų pridėsime taip pat lygius kampus, tai ir sumos bus lygios.

Pagaliau, trikampių lygybei įrodyti įtraukiama dar viena trečiosios grupės aksioma.

7. *Jeigu vieno trikampio dvi kraštinės ir tarp jų esantis kampas atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir tarp jų esančiam kampui, tai ir kiti šių trikampių kampai atitinkamai lygūs.* Pavyzdžiui, jeigu turime $\triangle ABC$ ir $\triangle A'B'C'$ ir $AB = A'B', AC = A'C'$ ir $\angle A = \angle A'$, tai ir $\angle B = \angle B',$ o $\angle C = \angle C'$.

Remiantis šiomis septyniomis aksiomomis, pradžioje įrodoma pagrindiniai trikampių lygybės požymiai, o toliau ir visos teoremos apie figūrų lygybę, pagrįstos šiais požymiais. Tuomet nebereikia figūrų sutapdinti.

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, kaip įrodomas pirmasis trikampių lygybės požymis.



28 brėž.

Tarkime, kad duoti trikampiai ABC ir $A'B'C'$ (28 brėž.), kurių $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ir $\angle A = \angle A'$. Reikia įrodyti, kad ir visi kiti trikampių elementai lygūs. Remdamiesi 7 aksioma, randame, kad $\angle B = \angle B'$ ir $\angle C = \angle C'$. Lieka įrodyti, kad ir $BC = B'C'$. Tarkime, kad $BC \neq B'C'$. Tuomet ant kraštinės $B'C'$ nuo taško B' atidėsime $BC'' = BC$. Išnagrinėsime $\triangle ABC$ ir $\triangle A'B'C''$. Jų $AB = A'B'$, $BC = BC''$ ir $\angle B = \angle B'$. Tuomet iš 7 aksiomos ir $\angle B'A'C'' = \angle A$. Bet du kampai, lygūs tam pačiam trečiajam, lygūs ir tarpusavyje, todėl $\angle B'A'C'' = \angle B'A'C'$. Gavome, kad nuo spindulio $A'B'$ toje pačioje pusplokštumėje nubrėžti du skirtingi kampai, lygūs tam pačiam kampui A , o tai prieštarauja 4 aksiomai. Taigi, atsisakę prielaidos, kad $BC \neq B'C'$, gauname $BC = B'C'$.

Panašiai įrodomos ir likusios teoremos apie figūrų lygybę.

7. Tolesniam geometrijos dėstymui būtina įvesti dar vieną aksiomų grupę, būtent, *nenutrūkstamumo aksiomas*. Su šios grupės aksiomomis glaudžiai susiję tiesės ir apskritimo susikirtimo ir apskritimų tarpusavio susikirtimo uždaviniai. Visi geometrijos brėžiniai, braižomi skriestuvu

ir liniuote, remiasi būtent šiais uždaviniais. Vadinasi, nenutrūkstamumo aksiomos yra labai svarbios. Be to, nenutrūkstamumo aksiomomis yra pagrįsta geometrijos dydžių matavimo teorija.

Nenutrūkstamumo aksiomų grupėje yra dvi aksiomos.

1. Archimedo aksioma. *Jeigu duotos dvi atkarpos, kurių pirmoji didesnė už antrąją, tai, pakartodami mažesniąją atkarpą dėmeniu pakankamai daug kartų, visuomet galime gauti sumą, didesnę už didesniąją atkarpą.* Kitaip sakant, jeigu $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ — dvi atkarpos, iš kurių $\bar{a} > \bar{b}$, tai egzistuoja toks sveikasis skaičius n , kad $n\bar{b} > \bar{a}$.

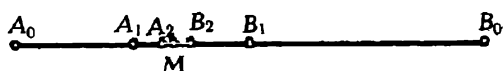
Archimedo aksioma yra ir mokykliniame vadovėlyje — skyriuje apie atkarpų matavimą. Dviejų atkarpų bendrojo mato radimas nuoseklaus atidėjimo būdu, apie kurį kalbėjome anksčiau, remiasi Archimedo aksioma. Iš tikrųjų, šiuo būdu mažesnė atkarpa atidedama ant didesnės, o Archimedo aksioma tvirtina, kad, šitaip atidedant, mažesniųjų atkarpų suma galų gale uždengs didesniąją atkarpą.

Tiesiog iš Archimedo aksiomos darome išvadą: jeigu atkarpa $\bar{a}$ didesnė už atkarpą $\bar{b}$, tai visuomet egzistuoja toks sveikasis skaičius n , kad $\frac{\bar{a}}{n} < \bar{b}$.

Antroji nenutrūkstamumo aksioma vadinama Kantoro aksioma, arba tiesine pilnumo aksioma. Jos tekstas šitoks:

2. *Jeigu yra atkarpų sistema, kurios kiekviena pakesnė atkarpa yra pirmesnės atkarpos viduje, ir jeigu toje sistemoje visuomet galima rasti atkarpą, mažesnę už bet kurią duotąją, tai egzistuoja vienintelis taškas, esantis visų šių atkarpų viduje.*

29 brėž.



Kantoro aksiomos pritaikymą pailiustruosime, išnagrinėdami šitokį pavyzdį. Imsime atkarpą A_0B_0 (29 brėž.),

jos vidurį pažymėsime B_1 ir rasime atkarpos A_0B_1 vidurį, kurį pažymėsime A_1 . Toliau imsime A_1B_1 vidurį, jį pažymėsime B_2 ir rasime atkarpos A_1B_2 vidurį, o jį pažymėsime A_2 . Toliau imsime A_2B_2 vidurį, jį pažymėsime B_3 , rasime A_2B_3 vidurį ir pažymėsime A_3 . Toliau imsime A_3B_3 vidurį ir t. t.* Atkarpos A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , ... ir t. t. sudaro tiesinę pilnumo sistemą. Iš tikrųjų, kiekviena sekanti atkarpa yra pirmesnės viduje ir lygi jos $\frac{1}{4}$. Tuo būdu, atkarpos A_1B_1 ilgis lygus $\frac{1}{4} A_0B_0$, $A_2B_2 = \frac{1}{16} A_0B_0$, $A_3B_3 = \frac{1}{64} A_0B_0$, ... ir bendrai $A_nB_n = \frac{A_0B_0}{4^n}$.

Iš Archimedo aksiomos išplaukia, kad gautasis ilgis $\frac{A_0B_0}{4^n}$, esant pakankamai dideliame n , gali būti mažesnis už bet kurią rastą atkarpą. Tuo būdu, visos aksiomos sąlygos išpildytos, ir egzistuoja vienintelis taškas, esantis visų atkarpų sistemos viduryje. Šį tašką lengva nurodyti. Iš tikrųjų, jeigu imsime tašką M , atskiriantį $\frac{1}{3}$ atkarpos A_0B_0 (t. y. $A_0M = \frac{1}{3} A_0B_0$), tai šis taškas ir bus ieškomasis. Jeigu tašką A_0 laikysime atskaitymo pradžios tašku skaičių ašyje, o atkarpą A_0B_0 laikysime lygia vienetui, tai taškus $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ atitiks skaitinės reikšmės:

$$\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{16}; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{21}{64}; \dots;$$

$$\frac{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}}{4^n}.$$

Kiekviena iš šių trupmenų yra mažesnė už $\frac{1}{3}$.

* Atkarpos A_3B_3 brėžinyje jau negalima parodyti, ją reikia įsivaizduoti.

Iš tikrųjų, jeigu kiekvienos iš šių trupmenų vardiklį sumažinsime vienetu, tai trupmena padidės ir bus lygi $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1+4+4^2+\dots+4^{n-1}}{4^n-1} = \frac{1+4+4^2+\dots+4^{n-1}}{(4-1)(1+4+4^2+\dots+4^{n-1})} = \frac{1}{3}^*.$$

Kita vertus, taškus $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ atitinka skaitinės reikšmės

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}; \dots; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \dots - \frac{1}{2^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Skaitinė reikšmė, atitinkanti tašką B_1 , gali būti ir taip užrašyta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Sudėję šiuos skaičius, gausime:

$$\frac{2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \dots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1}{2^{2n+1}}.$$

Iš čia lengva įsitikinti, kad kiekviena iš skaitinių reikšmių, atitinkančių taškus $B_1, B_2, \dots, B_n$, yra didesnė už $\frac{1}{3}$. Padidinę trupmenos vardiklį vienetu, tuo pačiu sumažinsime trupmeną ir gausime:

$$\begin{aligned} \frac{2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \dots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1}{2^{2n+1} + 1} = \\ = \frac{2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \dots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1}{(2+1)(2^{2n} - 2^{2n-1} + 2^{2n-2} - \dots - 2^3 + 2^2 - 2 + 1)} = \frac{1}{3}^{**}. \end{aligned}$$

* Čia naudojamos formulė

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

** Čia naudojamos formulė

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Taigi, visos skaitinės reikšmės, atitinkančios taškus $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$, yra didesnės už $\frac{1}{3}$.

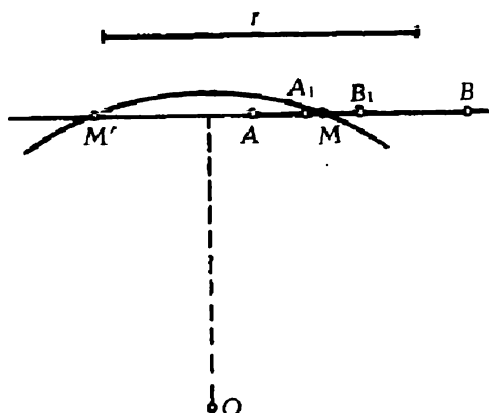
Vadinasi, taškas M , kurį atitinka skaitinė reikšmė $\frac{1}{3}$, yra viduryje kiekvienos iš atkarpų $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$. Tuo būdu, tai ir yra vienintelis taškas, apibrėžiamas šių atkarpų seka.

Dabar įrodysime pagrindinę teoremą apie tiesės ir apskritimo susikirtimą.

Priminsime, kad apskritimas nusakomas centru ir spinduliu. Plokštumos taškai, kurių atstumai nuo centro mažesni už spindulį, vadinami apskritimo *vida*us taškais, o taškai, kurių atstumai nuo centro didesni už spindulį, vadinami apskritimo *išorės* taškais. Pagrindinė teorema šitaip formuluojama.

Atkarpa, jungianti apskritimo vidaus tašką su išorės tašku, turi bendrą tašką su apskritimu ir tiksliai vieną.

Tarkime, kad duotas apskritimas, kurio centras O ir spindulys r , A — jo vidaus taškas ($OA < r$), B — išorės taškas ($OB > r$) (30 brėž.). Pirmiausia įrodysime štai ką:



30 brėž.

jeigu ant AB yra taškas M , kurio atstumas nuo taško O lygus spinduliui, tai toks taškas tėra vienintelis. Iš tikrųjų, jeigu toks taškas egzistuoja, tai egzistuoja ir taškas M' , simetriškas M atžvilgiu statmens, nuleisto iš O į tiesę AB ,

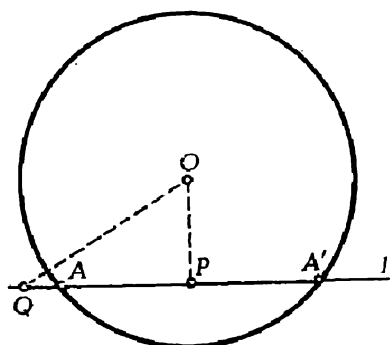
be to, $M'O = MO = r$. Pagal pasvirųjų, išvestų iš tiesės AB taško, savybę, visi atkarpos $M'M$ vidaus taškai bus ir apskritimo vidaus taškai, o atkarpos $M'M$ išorės taškai bus ir apskritimo išorės taškai. Todėl taškas A visuomet turi būti tarp taškų M' ir M , o ant atkarpos AB gali būti tik vienas taškas M .

Tai nustatę, padalijame atkarpą AB pusiau ir palyginame su spinduliu atstumą nuo gauto taško iki centro. Jeigu šis atstumas bus lygus spinduliui, tai teorema bus įrodyta. Jeigu šis atstumas bus mažesnis už spindulį, tai taškas bus vidaus, ir jį žymėsime A_1 . Jeigu šis atstumas bus didesnis už spindulį, tai taškas bus išorės, ir jį žymėsime B_1 .

Toliau imsime A_1B (arba AB_1) vidurį, kurio atžvilgiu vėl bus trys galimi atvejai: arba jo atstumas nuo centro lygus spinduliui, ir tuomet teorema įrodyta, arba mažesnis už spindulį, ir tuomet šį tašką žymėsime raide A su atitinkamu numeriu, arba didesnis už spindulį, ir tuomet šį tašką žymėsime raide B su atitinkamu numeriu. Nerišdami kartodami šį procesą, gausime vieną iš dviejų išvadų: arba kad vienos iš tokių atkarpų atstumas nuo centro bus lygus spinduliui, ir tuomet teorema bus įrodyta, arba kad visi taškai, pažymėti raidėmis $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, bus vidaus, o pažymėti raidėmis $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$, — išorės. Betgi pastaruoju atveju gausime sistemą atkarpų, tenkinančių Kantoro aksiomos sąlygas, nes kiekviena paskesnė atkarpa yra pirmesnės viduje ir kiekvienos paskesnės ilgis du kartus mažesnis už pirmesnės. Vadinasi, egzistuoja vienintelis taškas, esantis visų tų atkarpų viduryje. Kadangi jis yra tarp visų vidinių ir visų išorinių atkarpos taškų, tai jis negali būti nei vidiniu, nei išoriniu; vadinasi, tai yra apskritimo taškas.

Iš šios teoremos taip pat išplaukia, kad jeigu tiesės atstumas nuo apskritimo centro mažesnis už spindulį, tai ši tiesė su apskritimu turi du ir tik du bendrus taškus. Iš tikrųjų, tarkime, kad O — apskritimo centras ir r —

spindulys (31 brėž.). Atstumas OP nuo centro iki tiesės l mažesnis už spindulį; vadinasi, P — vidaus taškas. Ant tiesės l nuo taško P atidėsime atkarpą $PQ=r$.



31 brėž.

Kadangi stačiajame trikampyje OPQ įžambinė OQ ilgesnė už statinį $PQ=r$, tai $OQ>r$, vadinasi, Q — išorės taškas. Remiantis įrodytąja teorema, atkarpa PQ su apskritimu turi vienintelį bendrą tašką A . Antras bendras taškas A' simetriškas A statmens OP atžvilgiu. Kadangi visi atkarpos AA' vidaus taškai yra ir apskritimo vidaus taškai, o visi išorės taškai — to paties apskritimo išorės taškai, tai kitų bendrų taškų tiesė l ir apskritimas neturi.

Teiginius, analogiškus Archimedo ir Kantoro aksiomoms, galima įrodyti ir apskritimo lankams; būtent, galima įrodyti:

1. Vieną duotąjį lanką pakartodami dėmeniu pakankamai daug kartų, visuomet galime gauti lanką, didesnę už bet kurį kitą duotąjį lanką.

2. Jeigu turime lankų sistemą, kurioje kiekvienas pasikesnis lankas yra viduje pirmesnio, ir jeigu toje sistemoje visada galima rasti lanką, mažesnę už bet kurį duotąjį, tai egzistuoja taškas, esantis visų šių lankų viduje.

Remdamiesi šiais teiginiais, lengvai galime įrodyti pagrindinę teoremą apie apskritimų susikirtimą.

Jeigu A — duotojo apskritimo vidaus taškas, o B — išorės taškas, tai bet kurio kito apskritimo lankas, jungian-

tis A ir B su duotuoju apskritimu, turi vieną ir tik vieną bendrą tašką.

Ši teorema įrodoma analogiškai teoremai apie apskritimo ir tiesės susikirtimą.

8. Paskutinė, penktoji, geometrijos aksiomų grupė susijusi su *lygiagretumo* sąvoka, joje tėra tik viena aksioma:

Per tašką, nesančią duotoje tiesėje, galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę, lygiagrečią duotajai.

Teiginius, kurie remiasi šia teorema, jau žinome, ir čia apie juos nekalbėsime.

Iš išnagrinėtosios aksiomų sistemos galime susidaryti pakankamą vaizdą apie neįrodomų teiginių visumą, kurią galima imti geometrijos pagrindu. Tačiau reikia pastebėti, kad, stengdamiesi kiek galima supaprastinti dėstymą, nesistengėme sumažinti šių teiginių skaičiaus. O aksiomų skaičių dar galima sumažinti. Pavyzdžiui, dvi Archimedo ir Kantoro aksiomas galima pakeisti viena — vadinamąja Dedekindo aksioma. Galima šiek tiek sumažinti aksiomų reikalavimus. Pavyzdžiui, Pašo aksiomoje galima nereikalauti, kad tiesė, kertanti vieną iš trikampio kraštinių, kirstų dar vieną ir *tik* vieną kraštinę. Pakanka reikalavimo, kad tiesė, kertanti vieną iš trikampio kraštinių, kirstų dar kitą trikampio kraštinę, o tai, kad ši kraštinė bus *tik* viena, galima įrodyti. Lygiai taip pat, formuluojant Kantoro aksiomą, galima nereikalauti, kad taškas, apibrėžiamas tiesinio pilnumo sistemos, būtų vienintelis. Kad šis taškas vienintelis, taip pat galima įrodyti. Tačiau dėl viso to dėstymas pasidarytų ilgesnis ir sunkesnis.

Baigdami šią knygelę, trumpai suformuluosime svarbiausias išvadas iš viso to, kas buvo joje išdėstyta.

1. Geometriją apibrėžiame kaip mokslą apie materialaus pasaulio erdvines formas.

2. Pirmąsias žinias apie erdvines formas gauname indukcijos keliu, t. y. daugkartinių stebėjimų ir bandymų keliu.

3. Esmingiausias ir bendriausias erdvines daiktų savybes formuluojame pagrindinių teiginių — aksiomų — sistemoje.

4. Aksiomų sistema tik tada teisingai atspindi iš tikrųjų egzistuojančias erdvines savybes, jeigu ji tenkina pilnumo, nepriklausomumo ir neprieštaravimo sąlygas.

5. Išskyrus aksiomas, visi likusieji geometrijos teiginiai — teoremos — gaunami dedukcijos keliu, t.y. išvedami iš aksiomų ir anksčiau įrodytų teoremų. Tokia išvadų sistema vadinama įrodymu.

6. Kad įrodymas būtų teisingas, t.y. kad neliktų abejonių įrodomos teoremos teisingumu, jis turi būti sudarytas iš teisingų išprotavimų ir be klaidų. Kad įrodymas būtų teisingas, reikia: 1) teisingai ir tiksliai suformuluoti įrodomą teiginį, 2) pasirinkti būtinus ir teisingus argumentus ir 3) įrodinėjant laikytis logikos taisyklių.

Skaitytojams, norintiems geriau susipažinti su matematinio įrodymo klausimais, galima rekomenduoti šitokią literatūrą.

1. Bendri logikos vadovėliai:

М. С. Строгович, Логика. Госполитиздат, 1949. В. Ф. Асмус, Логика, 1947.

Н. В. Таванец, Суждение и его виды. Изд-во Академии наук СССР, 1953.

2. Klausimai apie geometrijos pagrindinius teiginius ir aksiomų sistemą, o taip pat apie įrodymą yra knygose:

Ж. Адамар, Элементарная геометрия. Учпедгиз, 1948.

Klausimas apie įrodymą išnagrinėtas „Priede“.

Д. Гильберт, Основание геометрии. ОГИЗ, 1948.

Klausimas apie aksiominio metodo esmę išnagrinėtas įvadiniamе Р. Раševskio (П. К. Рашевского) straipsnyje.

Я. С. Дубнов, Ошибки геометрических доказательств. Гостехиздат, 1953.

Knygoje pateikiama daug klaidingų įrodymų pavyzdžių ir išnagrinėtos įvairios klaidos.

И. С. Градштейн, Прямая и обратная теорема. Гостехиздат, 1950.

Knyga skiriama tiesioginės ir atvirkštinės teoremų klausimui.

3. Uždavinių ir pratimų rinkiniai, kuriuose yra įrodymo uždavinių:

Daug įdomių uždavinių apie įrodymą yra jau minėtame Ж. Адамаро (Ж. Адамар) geometrijos kurse. Kartu pateikti prof. Д. Перепелкина (Д. И. Перепелкин) uždavinių sprendimai.

Д. О. Шклярский, И. И. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, Геометрия. Гостехиздат, 1952.

Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы. Гостехиздат, 1952.

Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии. Гостехиздат, 1951.

Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский, А. И. Фетисов, Сборник геометрических задач. Учпедгиз, 1951.

TURINYS

I V A D A S	3
§ 1. Kas yra įrodymas?	5
§ 2. Kam reikalingas įrodymas?	10
§ 3. Koks turi būti įrodymas?	17
§ 4. Kokius geometrinius teiginius galima priimti be įrodymo? ..	43

**АНТОНИН ИВАНОВИЧ ФЕТИСОВ
О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ
В ГЕОМЕТРИИ**

на литовском языке

Перевод с русского издания 1954 г.

Перевела

Н. ЖИЧКЕНЕ

Издательство «Минтис» Лит. ССР. г. Вильнюс,
1973 г.

**ANTONINAS IVANOVIČIUS FETISOVAS
APIE GEOMETRIJOS ĮRODYMUS**

Vertė

A. ŽIČKIENĖ

Redaktorė

A. Palaimaitė

Viršelio dailininkas

A. Kazakauskas

Meninis redaktorius

A. Vitkauskas

Tech. redaktorė

D. Andriukonienė

Korektorė

I. Burnelytė

Duota rinkti 1973.II.20. Pasirašyta spaudai 1973.VI.5. Popierius
spaudos Nr. 1, form. 84×108¹/₃₂ — 3,36 sp. l. 3,2 l. l.

Tiražas 6000 egz.

Kaina Rb 0,12

Leidykla „Mintis“, Vilnius, Sierakausko g. 15.

Spausdino K. Poželos spaustuvė Kaune, Gedimino g. 10.

Užs. Nr. 296.